目　　录

第一部分　全国大学生数学建模竞赛获奖论文

电力市场的输电阻塞管理……夏　铁　廖　灿　段安乐（3）
饮酒驾车问题的数学模型……吴朝平　高　峰　徐晓红（12）
饮酒驾车模型……冉　松　汪昌盛　崔炳芬（23）
DVD在线租赁策划模型……柳　麟　肖辉龙　彭密肴（29）
DVD在线租赁模型……蓝代敏　赖天娥　吴厚光（38）
长江水质综合评价污水处理模型……熊万胜　邱全富　王文军（47）
关于长江水质综合评价污水处理模型……吕丝俊　陈学军　卢开诚（59）
艾滋病疗法及疗效的评价与预测模型……刘建中　陈　坤　李桂贞（73）
出版社资源配置模型……牟　维　罗先锋　曾　敬（86）
出版社资源配置模型……唐开均　姚　进　李国平（99）
易拉罐形状和尺寸的最优设计模型……熊万胜　谭周洪　郭以龙（113）
易拉罐形状和尺寸的最优设计模型……唐为民　彭　景　范　鑫（124）
煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制模型……杨秋霞　陈　娟　谢小平（137）
煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制模型……尹　东　李　莎　罗　洪（149）

第二部分　相关课题研究论文

高校教学质量评估数学模型……廖　灿（161）
高校学生工作绩效综合评价数学模型……吴朝平（174）
模糊层次分析法在教学质量评估中的应用……夏　铁（188）
地方性本科院校数学实验课程体系建构……高　峰（204）
文科数学教材质量指标体系的构建与分析……甘祖英（217）
大学生生活质量的评价与分析……冉　桠（231）
高校教学服务部门日常经费分配模型……郭以龙（244）
高校教学执行部门办学经费分配模型……谭周洪（253）

第三部分　“挑战杯”全国大学生课外学术科技获奖作品

酒精浓度衰退曲线的应用研究……吴朝平　高　峰　徐晓红（265）
煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制研究……谢小平　罗先锋（292）

第一部分

全国大学生数学建模竞赛获奖论文

电力市场的输电阻塞管理

夏 轶 廖 灿 段安乐

【摘 要】电力市场的输电系统是一个非常复杂的系统，若干条主要线路涉及功潮流与发电机组出力之间的关系，包括阻塞管理费用的计算，安全裕度、爬坡速率的控制，以及对下一时段各机组出力分配的问题. 本文首先根据表 1、表 2 的数据散点图得到了各线路的潮流值与各机组出力的线性关系，然后大胆运用多元线性回归模型对问题 1 进行求解，根据最小二乘法准则用 Matlab 实现了所求解的近似表达式，并进行了残差分析. 经过对异常数据的反复处理，发现其估计值与实际值较吻合，进而验证了该模型的准确度及可行性. 在对问题 3 的求解中，我们运用了动态规划排序模型，借助 Matlab7.0 得出了下一时段预报负荷需求为 982.4 MW 时的最优出力分配预案. 在引起输电阻塞时，我们综合考虑了线路潮流值及安全裕度等因素，根据输电管理原则和电力市场交易准则，运用分散优化、决策理论及全局最优解的一致性，建立了一个非线性规划模型和一个多目标非线性规划模型，利用 Lingo8.0 等软件计算出较为满意的结果.

问题 3 的结论：150，79，180，99.5，125，140，95，113.9（单位：MW）

问题 4 的结论：最小阻塞费用：5 565 元

潮流值：165，148，−155，124.8，132，159（单位：MW）

分配方案：152.9，86.88，228，83.5，152，102，60，116.5（单位：MW）

问题 5 的结论：最小阻塞费用：1 050 元

实际裕度值：0.051 35，0.071 10，0.035 55，0.043 45，0.059 25，0.055 30

【关键词】多元回归 动态 非线性规划

1 问题重述

在电力市场化过程中，我国电力市场采取交易与调度一体化的模式，从而使电力从生产到使用的四大环节瞬间即可完成. 其中电网公司负责组织交易、调度和配送，并遵循电网中“安全第一”的原则，同时还要制订一个电力市场交易规则，按照购电费用最小的经济目标来运作. 市场交易——调度中心依据相关影响制定各发电机组的出力（发电功率）分配方案，使每条线路上的有功潮流（输电功率和方向）取决于电网结构和各发电机组的出力. 在执行调度计划过程中，还需实时调度承担 AGC（自动发电控制）辅助服务的机组出力，以跟踪电

网中实时变化的负荷．当发生输电阻塞时，需要研究如何制订既安全又经济的调度计划．

（1）试用表 1、表 2 所给相关数据确定各线路上有功潮流关于各发电机组出力的近似表达式．

（2）设计一种简明、合理的阻塞费用计算规则．

（3）根据已知的负荷需求，试按照电力市场规则给出下一个时段各机组的出力分配预案．

（4）按照潮流限值表检查出力分配预案，并做适度调整，算出与该方案相应的阻塞费用．

（5）若改变负荷需求，其结果又如何？

2　基本假设

基本假设：

（1）假设在整个电力输送过程中，发电机组的总出力（总发电功率）等于负荷需求；

（2）假设每台机组单位时间内增加或减少的出力相同；

（3）假设清算价对应的段容量可能只选取部分；

（4）假设某时段全部机组的所有出力均按清算价结算；

（5）假设 6 条线路同等重要；

（6）假设每台机组和各条线路均为周期性（15 min）报价．

3　符号说明

符号说明：

y_i——第 i 条线路的潮流值；

x_{kj}——第 k 个方案中第 j 台机组的出力；

ε_i——随机误差（残差）；

β_k——回归参数的逆向量；

w_j——0 方案中各机组的出力；

v_j——各机组的爬坡速率；

m_i——各线路的潮流限值；

a_j——各机组出力的增加值；

d_j——各机组出力的减少值；

q_{3j}——问题 3 中所得各机组的出力；

q_{5j}——问题 5 中所得各机组的出力；

p——清算价；

p_j^+——第 j 台机组下一段的段价；

p_j^-——第 j 台机组上一段的段价；

r_i——第 i 条线路的安全裕度.

4 模型建立与求解

4.1 模型 1

4.1.1 模型分析

问题 1 中需要确定各线路上有功潮流关于各发电机组出力的近似表达式. 在表 1 和表 2 中给出了 8 台发电机组和 6 条主要线路的出力和潮流值，各发电机组出力与各线路上有功潮流有着密切的联系，即各机组出力总和与各线路的潮流值相等，且根据数据所得到的散点图可看出这是一个线性关系图，由此可用多元线性回归模型对该问题进行求解.

4.1.2 模型建立

在回归分析中，自变量 $X=(x_{i1},\cdots,x_{im})$ 是影响因变量 Y 的主要因素. 另外，Y 还受到随机因素的干扰，可以假定这种干扰服从零均值的正态分布.

若令自变量 x_{ij} 为各发电机组的出力，因变量 y_i 为各线路上有功潮流，β_i 为回归参数，ε_i 为残差，则根据多元线性回归模型，y_i 与 x_{ij} 有如下线性关系（模型 1）：

$$\left.\begin{aligned} Y &= X\beta+\varepsilon \\ \varepsilon &\sim N(0,\delta^2)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中

$$Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m}\\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm}\end{pmatrix},\quad \varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$$

其中，δ 未知，现得到 n 个独立观测数据（$y_i, x_{i1},\cdots,x_{im}$）（$i=1,\cdots,n$）.

4.1.3 模型的求解及其检验

（1）运用最小二乘法估计模型中的参数 β，运用 Matlab7.0 统计工具箱中提供的命令 regress 实现多元线性回归（见程序三 CANSHU.M）：

由（1）式可以得到数据的误差平方和：

$$\varphi(\beta)=\sum\varepsilon_i^2=(Y-X\beta)^{\mathrm T}(Y-X\beta)$$

从而可推出 β 的最小二乘估计：

$$\hat\beta=(X^{\mathrm T}X)^{-1}X^{\mathrm T}Y \tag{2}$$

将 $\hat\beta$ 代回原模型得到 Y 的估计值：

$$\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_i+\cdots+\hat{\beta}_m x_{i_m} \tag{3}$$

而这些数据的拟合值为 $\hat{y}=\hat{x}\beta$，拟合误差为 $e_i=y-\hat{y}(e_1, e_2,\cdots, e_n)$ 并称为残差，可作为随机误差ε的估计.

（2）求解过程：

① 确定回归系数的点估计值，用命令：

b = regress(y，x)

② 求回归系数的点估计值和置信区间估计，并检验回归模型，用命令：

[b，bint，r，rint，stats] = regress（y，x，alpha）

③ 画出残差及其信区间，用命令：

rcoplot（r，rint）

上述命令中，各符号的含义如下：

① 其中 $\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{X}$ 同上说明，$\boldsymbol{b}$ 为回归系数的点估计值 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$，即

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}\hat{\beta}_0\\ \hat{\beta}_1\\ \vdots\\ \hat{\beta}_m\end{pmatrix}$$

② alpha 显著性水平（缺省时为 0.05)；

③ bint 为回归系数的区间估计；

④ r 与 rint 分别为残差及其置区间；

⑤ stats 是用于检验回归模型的统计量，有三个数值，第一个是相关系数γ^2，γ^2越接近 1，说明回归方程越显著；第二个是 F 值，$F>F_{1-\alpha}(k, n-k-1)$ 时，拒绝 H_0，F 越大，说明回归方程越显著；第三个是与 F 对应的概率 P，$P<\alpha$ 时，拒绝 H_0，回归模型成立.

（3）用 Matlab 算出其结果：

b =					
110.296 5	131.228 9	−108.873 2	77.481 7	132.974 5	120.663 3
0.082 8	−0.054 6	−0.069 5	−0.034 5	0.000 5	0.237 8
0.048 3	0.127 9	0.061 6	−0.102 4	0.243 3	−0.060 2
0.053 0	−0.000 0	−0.156 6	0.205 2	−0.064 6	−0.077 9
0.119 9	0.033 3	−0.009 9	−0.020 8	−0.041 1	0.093 0
−0.025 4	0.086 8	0.124 5	−0.011 8	−0.065 2	0.046 9
0.122 0	−0.112 4	0.002 1	0.006 0	0.070 3	0.000 1
0.121 6	−0.018 9	−0.002 5	0.144 9	−0.004 3	0.165 9
−0.001 2	0.098 7	−0.201 4	0.076 5	−0.008 9	0.000 7

从而确定各线路上有功潮流关于各发电机组出力的近似表达式：

$y_1 = 110.296\ 5 + 0.082\ 8 * x_1 + 0.048\ 3 * x_2 + 0.052\ 6 * x_3 + 0.119\ 9 * x_4 -$
$0.025\ 4 * x_5 + 0.122\ 0 * x_6 + 0.121\ 6 * x_7 - 0.001\ 2 * x_8$

$y_2 = 131.228\ 9 - 0.054\ 6 * x_1 + 0.127\ 9 * x_2 - 0.000\ 0 * x_3 + 0.033\ 3 * x_4 +$
$0.086\ 8 * x_5 - 0.112\ 4 * x_6 - 0.018\ 9 * x_7 + 0.098\ 7 * x_8$

$y_3 = -108.873\,2 - 0.069\,5 * x_1 + 0.061\,6 * x_2 - 0.156\,6 * x_3 - 0.009\,9 * x_4 + 0.124\,5 * x_5 + 0.002\,1 * x_6 - 0.002\,5 * x_7 - 0.201\,4 * x_8$

$y_4 = 77.481\,7 - 0.034\,5 * x_1 - 0.102\,4 * x_2 + 0.205\,2 * x_3 - 0.020\,8 * x_4 - 0.011\,8 * x_5 + 0.006\,0 * x_6 + 0.144\,9 * x_7 - 0.076\,5 * x_8$

$y_5 = 132.974\,5 + 0.000\,5 * x_1 + 0.243\,3 * x_2 - 0.064\,6 * x_3 - 0.041\,1 * x_4 - 0.065\,2 * x_5 + 0.070\,3 * x_6 - 0.004\,3 * x_7 - 0.008\,9 * x_8$

$y_6 = 120.663\,3 + 0.2378 * x_1 - 0.060\,2 * x_2 - 0.077\,9 * x_3 + 0.093\,0 * x_4 + 0.046\,9 * x_5 + 0.000\,1 * x_6 + 0.165\,9 * x_7 + 0.000\,7 * x_8$

对这 6 组数据运用 Matlab 进行回归分析及检验结果：

stats = 1.0e + 004*

0.000 1	0.586 2	0	0.000 1	0.722 9	0	0.000 1	2.235 2	0
0.000 1	2.558 3	0	0.000 1	0.697 2	0	0.000 1	1.745 5	0

由上数据可知回归模型成立，与此同时，运用 rcoplot（r，rint）对残差进行分析，作出对应的 6 幅残差图（见图 1）.

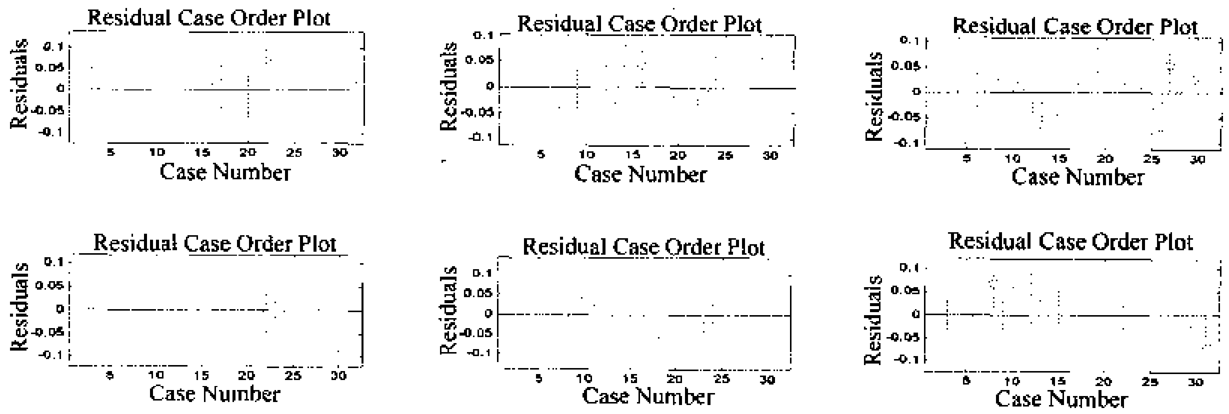


图 1

由于残差ε_i服从均值为零的正态分布，所以若某个ε_i的置信区间不包含零点，则认为这个数据是异常的，可予以剔除. 据此我们反复对数据进行处理，再多次运用 rcoplot（r，rint）对残差图进行分析，发现只有在进行第三次数据处理时，残差图上 6 幅图的置信区间中，不含零点的个数是最少的，即可视为最优结果（见图 2）.

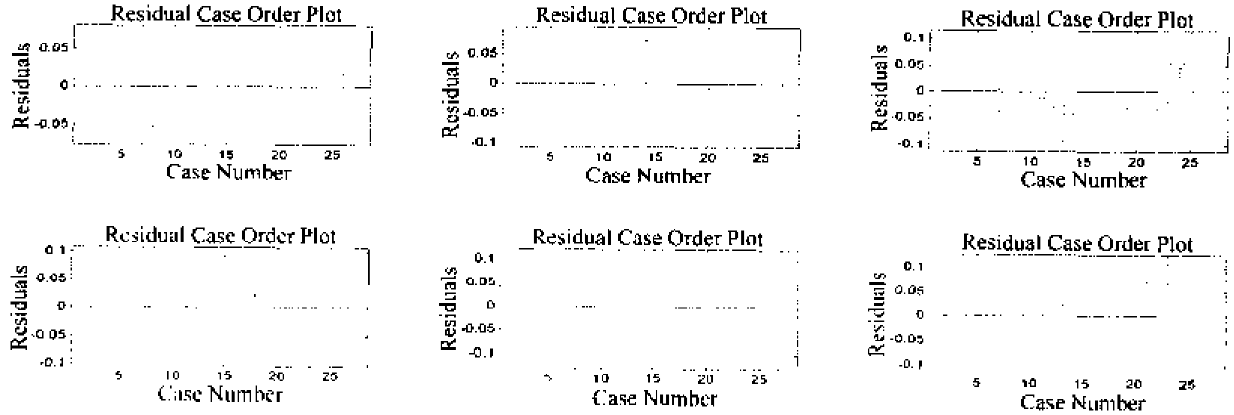


图 2

至此，问题 1 可算得到了完满解决，通过一系列的验证也证实了我们所选出的模型是可以得出最优化结论的.

4.2 模型 2

4.2.1 模型分析

本模型用来解决问题 3. 由于下一时段的负荷 982.4 MW 应由 8 个机组一起提供，而同一时段各机组的段容量又有所不同，并且越往后段容量越往上提升（由表 2 可知），也正因为如此，发电方才能为电网公司提供下一时段的负荷. 而各机组同一时段内的段价不同（由表 4 可知），所以可根据机组的所有出力均按清算价估价的原则. 如从电网公司的利益出发，为使其盈利最大，在其他影响因素不变的前提下，若能尽量压低清算价，则电网公司就能获得更大收益.

4.2.2 模型建立及求解

为遵从费用最小和低于爬破速率原则，我们可应用动态规划排序建立一个优化模型，即按照各机组的段价由底到高排序. 报价对应的段容量排在相应位置，按照以下两个原则求解该模型. 原则一：电网公司费用最小化原则；原则二：如果机组节点边际增量大于爬坡率，则进行调整直到它满足爬坡率要求，即模型 2. 根据以上原则运用 Matlab7.0（程序二），即可得到该时段的最优分配预案（见表 1），其清算价为 303 元/兆瓦小时.

表 1

机　组	1	2	3	4	5	6	7	8
出力（MW）	150	79	80	99.5	125	14	95	113.9

4.3 模型 3

4.3.1 模型分析

本模型用来解决问题 2. 依据电网公司遵循的最小化原则，既要结合模型 2 中所涉及的表 3、表 4 和表 5 中，关于各机组段容量、段价和爬破速率的综合考虑进而得出的下一个时段的最优化出力分配预案，同时又要尽量减少输电阻塞，最后还要兼顾在输电阻塞发生时，公平对待序内容量不能出力的部分和报价高于清算价的序外容量出力的部分，从而结算出给予发电方的阻塞费用. 根据电网市场交易原则，认为阻塞费用与机组的报价和该时段实际出力绕动值有关.

4.3.2 模型建立及求解

基于以上的一系列分析，易见在输电阻塞时，电组出力绕动将导致序内容量和序外容量的出现. 这里引进正、负偏差变量 a_j，d_j（$a_j \geqslant 0$，$d_j \leqslant 0$），再根据双方满意原则，可得序内容量阻塞费用为 $a_j(p_j^+ - p)$，序外容量阻塞费用为 $d_j(p - p_j^-)$. 从而可得到问题 2 的阻塞费用计算规则模型（模型 3）：

$$\sum_{j=1}^{8}(a_j(p_j^+ - p) + d_j(p - p_j^-))$$

4.4 模型 4

4.4.1 模型分析

本模型用来解决问题 4. 把问题 3 中得到的出力分配预案代回模型 1 的近似表达式，可得到 6 条线路的潮流值，分别为：173.322 6，144.607 8，−105.046 4，120.927 4，136.822 5，168.525 7（单位：MW），其中在第 1，5，6 条线路上有功潮流的绝对值均超出了对应的限值，即发生了输电阻塞. 根据安全且经济的原则，应对已知出力分配方案进行调整，尽量使该方案造成的阻塞费用降到最低.

4.4.2 模型建立及求解

（1）根据分析并结合模型 3 中所得到的简明合理的阻塞费用计算规则，要使输电阻塞费用最小，只需满足该问题所涉及的约束条件即可得到一个非线性规划模型（模型 4)：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{8}(a_j(p_j^+ - p) + d_j(p - p_j^-)) \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{8}(a_j + d_j) = 0 \\
& a_j d_j = 0 \\
& |x_i + d_j + a_j - w_j| \leqslant 15 v_j \\
& y_i \leqslant m_i
\end{aligned}
$$

（2）模型求解.

将由模型 3 中得到的出力分配方案以及表 6 中各线路的潮流值和表 5 中各机组的爬坡速率代入模型 4，运用 Lingo8.0 等编程可计算出如下结果（程序一）：

最小阻塞费用：556 5 元

分配方案：152.9，86.88，228，83.5，152，102，60，116.5（单位：MW）

潮流值：165，148，−155，124.8，132，159（单位：MW）

绕动值：2.9，7.88，48，−16，27，−38，−35，3.1（单位：MW）

4.5 模型 5

4.5.1 模型分析

此模型用于解决问题 5. 问题 3 中，当负荷需求是 1 052.8 MW 时，可重复 3，4 的工作. 问题 5 给出负荷需求高于 982.4 MW 时，可，根据模型 3 得到下一时段各机组的出力分配方案(见表 2)，其清算价为 356 元/兆瓦小时.

表 2

机组	1	2	3	4	5	6	7	8
出力（MW）	150	79	220.2	99.5	135	150	102.1	117

但是当负荷需求增加到 1 052:8 MW 时，也不能消除输电阻塞，此时，要回答问题 4 就必须考虑各条线路的相对安全裕度，从而又得到另一合适的模型.

4.5.2 模型建立及求解

若令 $r_i(i=1,2,3,\cdots,6)$ 表示各条线路可能达到的实际裕度值，且它们均小于等于相应的安全裕度值，则结合以上分析可得到如下多目标规划模型（模型 5）：

$$\min \quad \sum_{j=1}^{8}(a_j(p_j^+-p)+d_j(p-p_j^-)), \qquad \min \quad \sum_{i=1}^{6} r_i$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{8}(a_j+d_j)=0$$

$$a_j d_j = 0$$

$$|x_i+d_j+a_j-w_j| \leqslant 15v_j$$

$$y_i \leqslant m_i$$

这是一个多目标规划模型．在实际分配中各条线路的实际裕度不一样，但根据实际情况，若给实际裕度一个限值比率 a，使实际裕度小于等于安全裕度 a^*，可得到相应的分配方案，即将一个多目标规划变成了一个单目标规划，进而求解．运用 Matlab 和 Lingo8.0 软件，从 $a=0$ 开始，按二分法在区间 [0, 1] 进行循环搜索可得到最优结果．

问题 5 的结论：最小阻塞费用：1 050 元

潮流值：173，145，−155，128，133，164（单位：MW）

分配方案：150，81，218.2，99.5，135，150，102.1，117（单位：MW）

实际裕度值：0.051 35，0.071 10，0.035 55，0.043 45，0.059 25，0.055 30

绕动值：3，7，9.8，−0.45，17，−18.4，−18，0（单位：MW）

4.6 模型检验

将模型 3 中得到的阻塞费用计算规则，与问题 4 中所给出的约束条件共同构建出一个多目标非线性规划模型，由此所算出的结果能将输电阻塞费用降到最低．

为验证模型 3 的可行度，可从表 1 中随机抽取一种出力方案，并将之代入模型 3 和模型 4 中，发现得到的相关结果与所选方案中各机组出力的分配基本吻合．

5 模型的优缺点及推广

模型的优缺点及推广：

（1）在模型 1 的分析过程中，也曾考虑根据所给的表 1、表 2 中的数据，运用多元非线性回归模型进行求解，但通过 Matlab 程序计算后，我们将 0 方案的数据分别代进多元线性回归模型和非线性回归模型后，发现由前者所得到的所有相关点围绕回归平面的离散度远小于后者，这说明其拟合优度更高，估计值也更精确，回归估计计算标准差更小，估计值的代表性更强，以上这些表明了多元线性回归模型的准确性、可适用性，属于此题的极优模型．

（2）模型 2，模型 3，模型 4，模型 5 的建立极为巧妙．它充分利用了软件资源，结果的

预测是可行的，这些都便于预测人员深入了解预测机理及其实质，为进一步做好预测分析打下坚实的基础.

（3）为了便于问题的分析求解，使复杂问题简单化，我们可以假设 6 条线路是处于同等地位的. 这样就可以给实际裕度一个限值比率 a 以便进行循环搜索，从而将多目标规划转化为单目标规划. 但在实际生活中，这样的理想化境界有一定局限性，因此，如果我们将此模型中的权重视为不等的一组向量，那么这个模型将更适用于现实社会.

参 考 文 献

[1] 赵静，但琦. 数学建模与数学实验[M]. 北京：高等教育出版社，2003
[2] 刁明碧. 理论统计学[M]. 北京：中国科学技术出版社出版，1998
[3] 姜启源. 数学模型[M]. 北京：高等教育出版社，2003
[4] 萧树铁. 数学实验[M]. 北京：高等教育出版社，2002
[5] 潭浩强. C 程序设计[M]. 北京：清华大学出版社，1999
[6] 《运筹学》教材编写组. 运筹学[M]. 北京：清华大学出版社，1999

饮酒驾车问题的数学模型

吴朝平　高　峰　徐晓红

【摘　要】本模型是研究生活中的饮酒驾车问题．酒精对人体的作用过程实际上类似于生物医学中的药用过程，针对饮酒方式的不同，本文将饮酒过程分成快速饮酒、某时间段内匀速饮酒和周期饮酒三种形式，并分别建立了一室快速饮酒、二室匀速饮酒以及周期饮酒三种系统动力学模型，再运用非线性最小二乘法进行数据拟合得到相关参数，从而得到了血液中酒精含量与时间的函数关系．结合模型 1，运用 Matlab 工具得到了快速饮用三瓶啤酒时的违规时间分布：t：0.065～0.24 h 内饮酒驾车；t：0.24～4.5 h 内醉酒驾车；t：4.5～12 h 内饮酒驾车．结合模型 2，得到了在 2 h 内均匀饮用三瓶啤酒的违规时间分布：t：2～4.5 h 内为醉酒驾车；当 t 为 4.5～12 h 为饮酒驾车．模型 3 的建立，使问题 1 以及问题 3 得到了较为确切的解释．

【关键词】动力学　吸收速率　消除速率　模型

1　问题重述

在 2003 年全国道路交通事故死亡人数中，饮酒驾车造成的比例相当大，为此，国家发布了新的《车辆驾驶人员血液、呼气酒精含量阈值与检验》国家标准．在新标准下，大李在中午 12 点喝了一瓶啤酒，下午 6 点检查时符合标准，接着晚上又喝了一瓶，但凌晨 2 点检查时却被定为饮酒驾车．为什么喝同样多的酒，两次检查结果不一样呢？建立饮酒时人体内酒精含量与时间关系的数学模型，并讨论快速或慢速饮 3 瓶啤酒在多长时间内驾车就会违反新标准？估计血液中的酒精含量在什么时间最高？如果某人天天喝酒，是否还能开车？根据你所做的工作并结合新的国家标准写一篇短文，给想喝一点酒的司机如何驾车提出一点儿忠告．

2　符号说明及模型假设

2.1　符号说明

x_0 —— 人体饮入酒精总量；

t——饮用酒的时间；
$x(t)$——t 时刻血液中的酒精量；
$x_1(t)$——t 时刻人体吸收的酒精量；
M——人的体重；
λ——人的体液占人的体重的百分含量；
μ——人的血液占人体重的百分含量；
k_1——酒精在人体中的吸收速率常数；
k——酒精在人体中的消除速率常数；
$c(t)$——t 时刻血液中的酒精浓度；
F——酒精在人体中的吸收度；
V——人体的血液体积；
$V_{酒}$——喝酒的体积；
ρ——酒中的酒精含量；
τ——饮酒持续时间.

2.2 基本假设

（1）酒精在血液中的含量与在体液中的含量大致相同.
（2）每瓶啤酒的酒精含量、体积基本相同.
（3）酒精进入人体后，不考虑其他因素对酒精的分解作用.
（4）如果在很短时间内饮酒，认为是一次性饮入，中间的时间差不计.
（5）确定是否饮酒驾车或醉酒驾车应以新的国家标准为界.
（6）不管喝的什么酒，只以涉入的酒精总量计算.
（7）酒精按一级吸收过程进入体内.
（8）正常情况下，酒精在各人体中的吸收和消除速率基本相同.
（9）将慢速饮酒看做一个匀速过程.

3 问题分析与模型建立

3.1 模型 1（快速饮酒模型）

同药物一样，酒精进入机体后，作用于机体而影响某些器官组织的功能．另一方面，酒精在机体的影响下，可以在体内发生一系列的运动：酒精被吸收后进入血液循环．然后分布于各器官组织、组织间隙或细胞内，部分酒精则在血浆、组织中与蛋白质结合，或在各组织（主要是肝脏）发生化学反应而被代谢．最后，酒精可通过各种途径离开机体（排泄），即吸收、分布、代谢和排泄过程．它们可归纳为两大方面：一是酒精在体内位置的变化，即酒精的转运，如吸收、分布、排泄；二是酒精的化学结构的改变，即酒精的转化亦即狭义的代谢．由于转运和转化导致酒精在体内的量或浓度（血浆内、组织内）的变化，而且这一变化可随时

间推移而发生动态变化，又因为酒精有促进血液循环的作用；而药物动力学模型中的一室模型是指给药后，药物一经进入血液循环，即可均匀分布至全身，故快速饮酒情况可通过建立一室模型来求解.

虽然酒精在体内的分布状况很复杂，但酒精的吸收、分解等则都在系统内部进行，故酒精进入人体后，经一段时间可进入血液，而当进入血液，并在血液中达最高浓度后，开始消除．把酒精在体内的代谢过程看做进与出的过程，这样便会使问题得到简化．用 $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{in}$ 和 $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{out}$ 分别表示酒精输入速率和输出速率．由于单位时间内血液中酒精的改变即变化率 $\frac{dx}{dt}$ 就等于输入与输出速率之差，所以其动力学模型为

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{in}-\left(\frac{dx}{dt}\right)_{out} \tag{1}$$

又因为酒精在血液中的消除速率与当时血液内的药量成正比，所以 $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{out}=kt$．代入（1）式，得

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{in}-kt \tag{2}$$

则由（2）式可知 $x(t)$ 的变化规律由饮酒速率而定．而酒精在人体内的代谢可简单地用图 1 表示

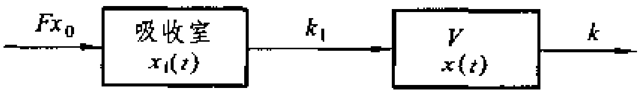


图 1

则 t 时刻吸收室的药量为 $x_1(t)$．又药物是按一级吸收过程进入体内的，对于吸收室有

$$\frac{dx}{dt}=-k_1x_1 \tag{3}$$

对于房室，有 $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{in}=k_1x_1$，于是（2）式变为

$$\frac{dx_1}{dt}=k_1x_1-kx \tag{4}$$

（3）式、（4）式构成一阶线性方程组．当 $t=0$ 时，$x_1(0)=Fx_0$，$x(0)=0$．解（2）式得

$$x_1=Fx_0\,e^{-k_1t}$$

将其代入（4）式得一阶线性非齐次方程

$$\frac{dx}{dt}+kx=k_1Fx_0\,e^{-k_1t}$$

则

$$x(t)=\frac{k_1Fx_0}{k_1-k}\left(e^{-kt}-e^{-k_1t}\right)$$

从而，人体内酒精含量

$$c(t)=\frac{k_1Fx_0}{V(k_1-k)}\left(e^{-kt}-e^{-k_1t}\right)$$

在这种情况下，酒精含量最大值出现的时间是使$\frac{dc}{dt}=0$时的t值. 一般情况下，又因为酒精在血液中的含量与在体液中的含量大致相同，所以

$$\frac{x_0}{M\lambda}=\frac{Fx_0}{M\mu}\Rightarrow F=\frac{\mu}{\lambda}\quad（F 为常数且 0<F<1）$$

又$X_0=\rho V_{酒}$，则人体内酒精含量与时间函数关系为

$$c(t)=\frac{k_1\mu\rho V_{酒}}{V\lambda(k_1-k)}(e^{-kt}-e^{-k_1t})\quad（一般情况）$$

3.1.1 模型的求解

根据图 1 中酒精含量实测数据拟合，可知它无法化为线性最小二乘拟合，故应直接做非线性最小二乘拟合. 用 Matlab 优化工具箱的 Leastsq[5]计算，拟合参数$x=\left(k_1,k,\frac{Fx_0}{V}\right)$（程序见：JM2004C1.m）. 拟合得

$$k_1=2.007\,9\ \text{mg}\cdot\text{ml}^{-1}\cdot\text{h}^{-1},\quad k=0.185\,5\ \text{mg}\cdot\text{ml}^{-1}\cdot\text{h}^{-1},\quad \frac{Fx_0}{V}=11.242\,3\ \text{mg/ml}$$

又由$x_0=\frac{11.242\,3\times V}{F}$，得到问题中隐含的一瓶啤酒的酒精量约为 27 543.635 mg.

3.1.2 问题 1 的解答

虽然大李喝等量的酒，但在相隔时间相同的情况下，两次检查的结果不一样. 这是因为第一次喝下去的酒，在 6 h 内并没有完全分解，还残留有相当一部分在血液中，并且这一部分在较长时间内不能完全分解. 由图 2 中喝一瓶啤酒的酒精含量随时间变化的函数图像可知，6 h 后，第一次喝的酒的酒精含量约 19.5 毫克/百毫升. 也就是说，此时血液中已有一定的酒精量. 这样，虽然第二次喝的是同样多的酒，但由于第一次残留部分的存在，已相当于涉入的酒精量增大了，使其同样再过 6 h，酒精含量将会大于 20 mg/百毫升. 这样大李碰到的情况也就很自然地得到解释了.

现通过实际计算证明：设A为第一次喝酒在 6 h 后，残留在血液中的酒精量，则第二次喝酒时，酒精含量$c(t)$与时间t的函数关系为

$$c(t)=\frac{k_1(Fx_0+A)}{V(k_1-k)}(e^{-kt}-e^{-k_1t})$$

代值并用 Matlab 计算（程序见 JM2004C5.LOG），则再过 6 h 酒精含量为 27.4 mg/百毫升．这就大于第一次的值了．

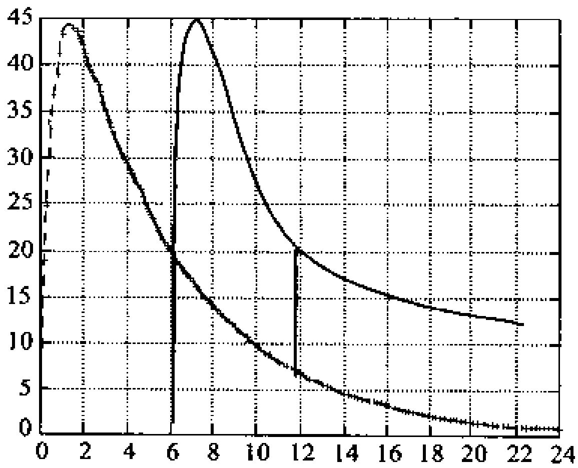


图 2

3.1.3　问题 2 中第一问的求解

当一个人在很短时间内喝 3 瓶啤酒时，相当于在瞬间使其吸收室的酒精浓度达最大值，运用模型 1 并用计算机拟合得其函数图像（见图 3）（程序见 JM20004C2.LOG）．

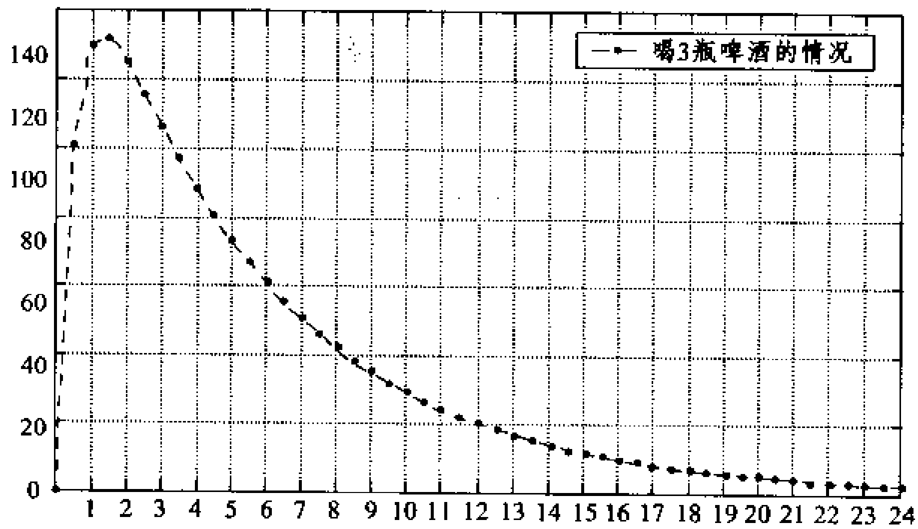


图 3

由图 3 可得：t：0.065～0.24 h 内饮酒驾车；t：0.34～4.5 h 内醉酒驾车；t：4.5～12 h 内饮酒驾车．

3.2　模型 2（匀速饮酒二室模型）

由于在 2 h 内慢速喝酒有多种方式，为了便于计算可考虑为匀速饮入等量酒精，即在时间 τ 内匀速吸收酒精．若体内酒精含量不超过一级消除动力学范围，假设人的酒精含量未达到平衡状态，随着人体吸收次数的增多，血液中酒精浓度逐渐升高．当在 τ 时间内饮完后，由于 τ 时刻前一小段时间内饮入的酒精在短时刻内没有被吸收，故在 τ 时刻后一段时间内，酒精浓度将继续升高，某一时刻将达到最大值．这一时刻后，酒精含量就会逐渐减小．考虑到一室模型

在求慢速喝酒情况下的局限性，下面采用建立二室模型．对二室模型，我们将建立两个关于酒精浓度的动力系统模型来描述其动态特性．

3.2.1 模型 2 的假设

（1）机体分为中心室和周边室，两个室的容积在过程中保持不变．

（2）药物从一室向另一室的转移速率，以及向体外的排除速率与该室的酒精浓度成正比．

（3）只在中心室一体外有酒精交换，即酒精从体外进入中心室，最后又从中心室排出体外．与转移和排除的数量相比，酒精的吸收可以忽略不计．

3.2.2 模型建立

二室模型的示意图（见图 4）.

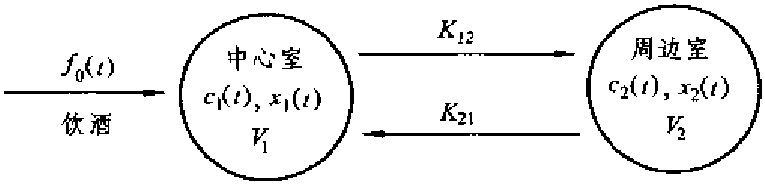


图 4

两个房室中酒精量 $x_1(t), x_2(t)$ 满足的微分方程：$x_1(t)$ 的变化率由一室向二室的转移 $-k_{12}x_1$，一室向体外排除 $-k_{13}x_1$，二室向一室的转移 $k_{21}x_2$ 及酒精 $f_0(t)$ 组成；$x_2(t)$ 的变化率由一室向二室的转移 $k_{12}x_1$ 及二室向一室的转移 $-k_{21}x_2$ 组成，于是有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}&=-k_{12}x_1-k_{13}x_1+k_{21}x_2+f_0(t)\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}&=k_{12}x_1-k_{21}x_2\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

$x_i(t)$与血液中酒精含量 $c_i(t)$，房室容积 V_i 显然有关系式

$$x_i(t)=V_ic_i(t),\quad (i=1,\ 2)\tag{6}$$

将（6）式代入（5）式可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}&=-(k_{12}+k_{13})c_1+\frac{V_2}{V_1}k_{21}c_2+\frac{f_0(t)}{V_1}\\ \frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}t}&=\frac{V_1}{V_2}k_{12}c_1-k_{21}c_2\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

喝酒相当于在酒精进入中心室之前先有一个将酒精吸收入血液的过程．此过程可以简化为有一个吸收室，如图 5 所示．

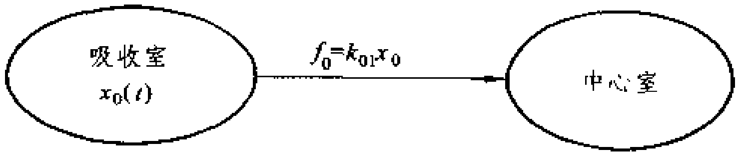


图 5 酒精经吸收室进入中心室

$x_0(t)$为吸收室的酒精，酒精由吸收室进入中心室的转移速率系数为 k_{01}，于是 $x_0(t)$ 满足：

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}=-k_{01}x_0\\ x_0(0)=D_0\end{array}\right\} \tag{8}$$

当 $f_0(t)=0$，$c_1(0)=\frac{D_0}{V_1}$，$c_2(0)=0$ 时，(7) 式可以化为

$$c_1(t)=A\mathrm{e}^{-\alpha t}+B\mathrm{e}^{-\beta t} \tag{9}$$

D_0 是饮入的酒精量，而酒精进入中心室的速率为

$$f_0(t)=k_{01}x_0(t) \tag{10}$$

将方程 (9) 式代入 (10) 式得

$$f_0(t)=D_0k_{01}\mathrm{e}^{-k_{01}t} \tag{11}$$

在这种情况下方程 (7) 的解的一般形式为

$$c_1(t)=A\mathrm{e}^{-\alpha t}+B\mathrm{e}^{-\beta t}+E\mathrm{e}^{-k_{01}t} \tag{12}$$

此时，这种情况下，酒精含量最大值出现的时间是使 $\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}=0$ 时的时间．其中

$$E=D_0k_{01}\quad 且\quad \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=k_{12}+k_{21}+k_{13}\\ \alpha\beta=k_{21}k_{13}\end{array}\right\} \tag{13}$$

3.2.3　参数估计

不妨设 $\alpha<\beta$，于是当 t 充分大时，$c_1(t)$ 可近似为

$$c_1(t)\approx A\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

对于适当大的 t_i 和相应的 $c_1(t_i)$，用最小二乘法估计出 α 和 A 的值．然后计算

$$\overline{c_1}(t)=c_1(t)-A\mathrm{e}^{-\alpha t} \tag{14}$$

再利用 (9) 式得

$$\ln\overline{c_1}(t)=\ln B-\beta t$$

对于较小的 t_i 和 (10) 式算出的 $\overline{c_1}(t_i)$，仍用最小二乘法可得到 β 和 B．由上可得参数值：A，α，β，B．

3.2.4　模型 2 的求解

将题中所给参考数据代入，运用 Matlab 工具，对前参数估计代值计算得（程序见 JM2004C6.C8）：

$$A=69.490\,8,\quad a=0.323\,4,\quad B=-48.025\,1,\quad b=2.77$$

将所求得的参数代入 (12) 式可得，并用 Matlab 画出匀速喝 3 瓶啤酒的酒精含量-时间曲线图

（见图 6 程序见 JM2004C9.M）.

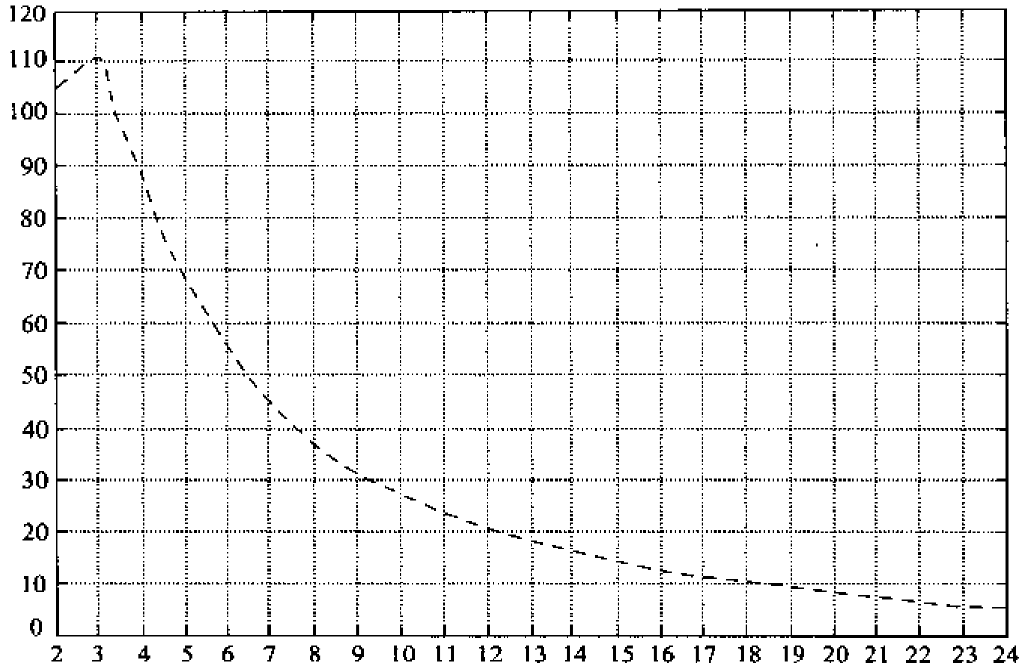


图 6　2 小时均匀饮酒的酒精含量与时间曲线图

由以上函数图像可知：当 t 为 2～4.5 h 内为醉酒驾车；当 t 为 4.5～12 h 为饮酒驾车.

3.3　模型 3（周期饮酒模型）

3.3.1　模型 3 的假设

（1）每次喝酒的相隔时间相同，且为常量；

（2）每次的喝酒量相同.

3.3.2　模型建立

设 $y(t)$ 表式 t 时刻酒精在人体内的浓度，$y(0)$ 表示 $t=0$ 时饮入的酒精量．已经知道，饮酒后，随时间推移，酒精在体内逐渐被吸收，也就是体内酒精的浓度逐渐降低，根据药物学理论，酒精浓度的变化率与饮酒量成线性比，则有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=-ky\\ y(0)&=y_0\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

其中，$k>0$ 且为吸收速率常数，其解为

$$y(t)=y_0\mathrm{e}^{-kt},\quad t\in[0,\mathrm{T})$$

当 $t=T$ 时，由于经过时间间隔 T，又第二次饮酒，饮入量为 y_0，所以 $t=T$ 时

$$y(T)=y_0+y_0\mathrm{e}^{-kt}$$

类似地，当 $t\to 2T$ 时，酒精含量为

$$\lim_{t\to 2T} y(T)=(y_0+y_0\,e^{-kT})e^{-kT}$$

并且当 $t=2T$ 时，又第三次饮酒，饮酒量仍为 y_0，所以

$$y(2T)=y_0+(y_0+y_0\,e^{-kT})e^{-kT}=y_0(1+e^{-kT}+e^{-2kT})$$

那么当 $t=3T$ 时，体内酒精浓度应为

$$y(3T)=y_0(1+e^{-kT}+e^{-2kT}+e^{-3kT})$$

按此类推，则当 $t=nT$ 时，体内酒精浓度达到

$$y(nT)=y_0(1+e^{-kT}+e^{-2kT}+e^{-3kT}+\cdots+e^{-nkT}) \tag{16}$$

（16）式的右边为一等比数列之和，利用等比数列求和，得

$$y(nT)=y_0\cdot\frac{1-e^{-(n+1)kT}}{1-e^{-kT}}$$

当 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} y=\dfrac{y_0}{1-e^{-kT}}$. 根据自己的要求，如果需要酒精含量接近 y_c 时，可近似地有

$$y_c=\frac{y_0}{1-e^{-kt}}$$

如果间隔时间 T 已确定，那么饮入酒精量可由

$$y_0=(1-e^{-k})y_c \tag{17}$$

计算，体内酒精的分布可由图 7 看出多次饮酒后，体内酒精浓度缓慢趋于极限值 y_c，由以上模型，代入参数计算，也可以解决问题 1. 取 $T=6$ 时，酒精含量为 19.98 毫克/毫升，取 $T=12$ 时，酒精含量为 27.6 毫克/毫升. 此结果与前面用一次模型求解的结果吻合. 这样更全面地解释了饮量相同且间隔时间相同，然而却前次达标，而后一次超标这一问题.

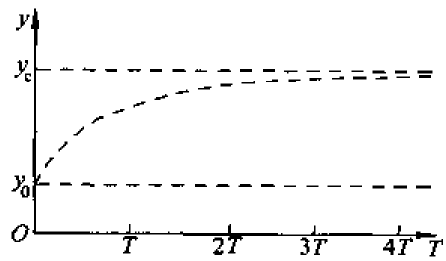


图 7

运用此模型，可更方便地解决天天饮酒是否能驾车的问题. 令 $T=24$ 时，$y_c=20$ mg/百毫升，代入（17）式得，$y_0=20\,000$ mg. 也就是说，只要每天的饮酒量小于 20 000 mg，就不会出现违规情况，即可驾车. 令 $y_c=80$ mg/百毫升，则 $y_0=80\,000$ mg，即饮酒量大于 80 000 mg 时就会出现醉酒驾车情况，即不能驾车. 而当每饮酒量为 $20\,000<y_0<80\,000$ mg 时，就会出现饮酒驾车情况. 类似地，本模型还可推广到更长周期情况的求解.

综上所述，现对第 3 问题解答：三种情况下，因考虑到拟合函数只存在一个驻点，即一个极值，则可对拟合函数求导. 然后计算驻点值即可解得各种情况下酒精含量达最高时的时间. 以在快速饮酒情况下. 饮 3 瓶啤酒为例，解得 $T_{\max}=1.314\,5$ h.

4 结果分析与检验

由于酒精不同于一般的药物，人饮用之后，酒精能迅速地进入人体，所以在快速饮酒情况下用一室模型来研究酒精的作用过程及代谢过程，与几室模型来研究酒精的作用过程及代谢过程并无太大的区别，将图 8 中酒精含量 $C(t)$ 的拟合曲线与实测数据的比较，可以看出，我们的结果是较为准确的，并且拟合的曲线是一条较为理想的曲线.

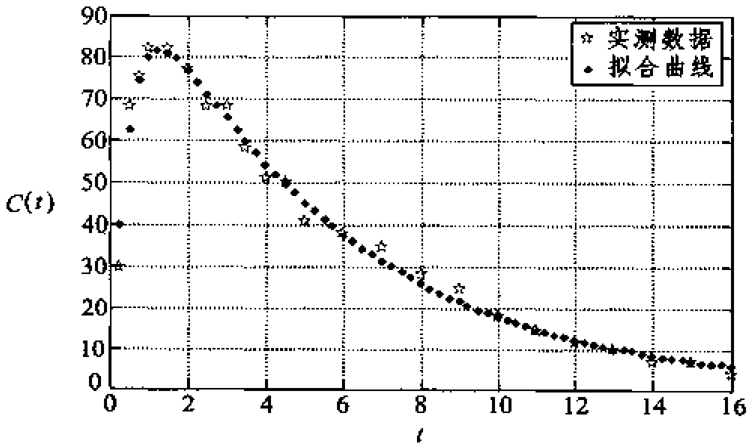


图 8 酒精含量 $C(t)$ 的拟合曲线与实测数据比较

对于匀速饮酒情况，由于匀速饮酒要考虑饮酒过程中的代谢情况，与快速饮酒有一定差异，所以采用二室模型来建立匀速饮酒模型，以达到减小误差的目的.

5 模型的评价与改进

5.1 模型的优点

（1）综合运用 Matlab 和 Lingo 两个软件，求解准确，在运用 Matlab 进行数据拟合时，得到了较理想化的曲线. 在表示喝 3 瓶啤酒的人什么时候是饮酒驾车，什么时候是醉酒驾车时，运用 Matlab 软件准确地做出了函数的图像，使结果一目了然.

（2）本模型分三种情况分别建立了模型，模型的稳定性高、适用性强.

（3）本模型的计算步骤清晰. 它引用了医药动力学的二室模型进行计算，可靠性较高.

（4）从问题出发，分析了应该考虑的各种情况，建立了一般的数学模型，并进行实例验证，从而证明了所建立的数学模型可以较好地解决实际问题.

（5）此模型具有极为广泛的应用性，对每一个具体的情况，都可以通过模型求解.

5.2 模型的缺点

（1）本文的模型参数仅是依靠题中给出的一组数据拟合求解得出，可能有一点偏差.

（2）模型为使计算简便，使所得的结果更理想化，忽略了一些次要因素．如，酒进入身体后随着血液流动，人体对酒精的吸收率是随时间变化的，而本模型是在吸收率恒定的情况下进行求解的．对于这些问题，由于时间关系本模型还未能更好的研究，有待以后的改进和完善．

5.3　模型的改进

由于人体内部的复杂性，及各器官对酒精转化的多样性，用一室或二室的情况模型都较为初级，三室或多室的情况模型则更准确，但考虑起来会很复杂，又由于短期收集资料的局限性，实行起来较为困难，可留待以后考虑．

6　模型的推广

我们建立模型的方法和思想可以推广到其他类似的问题．本文所建立的模型不仅估算出了 t 时刻人体内的酒精含量，而且还能给饮酒驾车的司机们如何饮酒提供一些理论参考．又如，现在有些感冒药对人的大脑有刺激作用，当其血药浓度高于某标准的时候就不能进行驾车等一系列安全操作，于是也可以用此模型的研究结论来对其相关问题进行分析．

参 考 文 献

[1]　张双德．医用高等数学．天津：天津科学技术出版社，1999

[2]　萧树铁．大学数学实验．北京：高等教育出版社，1999

[3]　王沫然．Matlab6.0 与科学计算．北京：电子工业出版社，2000

[4]　姜启源．数学模型（第三版）．北京：高等教育出版社，2003

饮酒驾车模型

冉　松　汪昌盛　崔炳芬

【摘　要】用药物动力学的知识，建立了一个关于饮酒驾车的数学模型，借用 matlab 软件，分析了酒精在人体内的变化情况，给饮酒还需驾车的司机提出了一些建议.

【关键词】房室模型　微分方程　非线性最小二乘法

1　问题重述

2004 年 5 月 31 日国家质量监督检查检疫局颁布新的《车辆驾驶人员血液、呼气酒精含量阀值与检验》国家标准规定：汽车驾驶人员血液的酒精含量大于或等于 20 mg/百毫升，小于 80 mg/百毫升为饮酒驾车，血液中酒精含量大于或等于 80 mg/百毫升为醉酒驾车. 大李在中午 12 点喝了 1 瓶啤酒，下午 6 点检查时合乎新的驾车标准，紧接着他在吃晚饭时又喝了 1 瓶啤酒，为了保险，他在凌晨 2 点才驾车回家，再一次检查时却被定为饮酒驾车.

（1）为什么大李的情况会变化？

（2）在喝了 3 瓶或者半斤低度白酒后多长时间内驾车会违反上述标准：

① 酒是在很短时间内喝的；

② 酒是在较长一段时间（比如 2 h）内喝的.

（3）血液中的酒精含量在什么时候最高？

（4）如果天天喝酒是否还能开车？

（5）写一篇文章，给想喝一点酒的司机提出一点儿忠告.

2　假设及符号说明

2.1　基本假设

（1）身体构成的房室的容积固定，酒精浓度均匀；

（2）房室间酒精转移速率与房室内酒精的浓度成正比（亦与量成正比）；

（3）有关资料表明，酒精的吸收耗时为 30 min 到 3 h，即 3 h 后的吸收量基本为 0；

（4）短时间内饮酒看成一个有初始量的吸收室；

（5）较长时间内的饮酒方式看成以恒速向吸收室输入酒精；

（6）以一天的时间考虑，人体正常时自身分泌的酒精保持一定的浓度.

2.2 符号说明

m_0 —— 1 瓶啤酒被吸收进体液的酒精含量；

c_0 —— 人体正常时自身分泌酒精浓度；

$x_i(t)$ —— 第 i 室的酒精质量函数；

$c(t)$ —— 中心室中的血液浓度函数；

V_2 —— 中心室的容量，即人体体液的体积；

k_i —— 酒精转移速率常数；

$f_i(t)$ —— 酒精的转移速率函数（$i=1,2$）.

3 问题的分析 —— 模型的建立和求解

为了分析酒精在体内运动（转运和转化）的动态规律，需要建立一个模型来模拟身体. 由药物动力学的知识，可将身体视为一系统，把该系统内部按动力学特点分为若干个房室. 也就是说，机体的模型由一些房室组成，对各个房室因酒精在其间转移速率不同而可以彼此区分.

不管饮酒方式如何，酒只有进入胃肠等消化道后，才被吸入体内. 在这种情况下（酒是短时间内喝的），把消化道考虑成一个有初始量的房室，酒精在消化道（吸收室）逐渐进入身体的各个部分（中心室），然后通过肝脏中的酶来分解酒精，或通过肺、皮肤、肾直接排除体外. 根据酒精转移和分解过程有如下示意图（见图 1）.

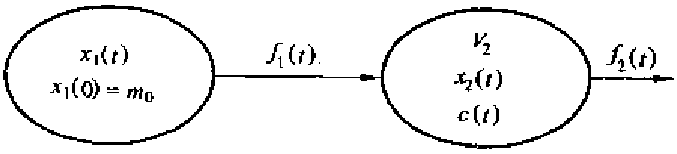


图 1

其中的吸收实际是一种“给药”模式，根据假设和示意图，可以建立酒精转移与分解的“单室模型”.

3.1 模型 1　短时间饮酒情况

利用微分法对各室中酒精量进行分析：

对吸收室，有

$$\begin{cases} x_1'(t) = -f_1(t) \\ x_1(0) = m_0 \\ f_1(t) = k_1 x_1(t) \end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x_1'(t)=-k_1x_1(t)\\x_1(0)=m_0\end{cases}$$

这是一个线性微分方程，求解得

$$x_1(t)=m_0\,\mathrm{e}^{-k_1t} \tag{1}$$

从而得到

$$f_1(t)=k_1m_0\,\mathrm{e}^{-k_1t},\quad t\in[0,3]$$

对中心室，有

$$\begin{cases}x_2'(t)=f_1(t)-f_2(t)\\c(0)=c_0\\x_2(t)=c(t)V_2\\f_2(t)=k_2x_2(t)\end{cases}\quad t\in[0,3]$$

$$\begin{cases}x_2'(t)=-f_2(t)\\c(0)=c_0\\x_2(t)=c(t)V_2\\f_2(t)=k_2x_2(t)\end{cases}\quad t\in[3,24]$$

用 Matlab 求解析解，即

$$\left.\begin{aligned}c(t)&=\frac{k_1m_0}{(k_2-k_1)V_2}(\mathrm{e}^{-k_1t}-\mathrm{e}^{-k_2t})+c_0\,\mathrm{e}^{-k_2t},\quad (t\in[0,3])\\c(t)&=\frac{m_0}{V_2}\mathrm{e}^{-k_2t}+c_0\,\mathrm{e}^{-k_2t},\quad (t\in[3,24])\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

令 $A=\dfrac{k_1m_0}{(k_2-k_1)V_2}$，在（1）式中，$m_0$ 是一个不定的初始量，尚需确定其系统参数．有关资料表明酒精得吸收耗时为 30 min 到 3 h，即 3 h 后吸收量基本为 0，对此时的中心室而言，有

$$\begin{cases}x_2'(t)=-f_2(t)\\x_2(3)=B+c_0\end{cases}\Rightarrow\quad c(t)=Be^{-k_2t}$$

其中 B 为 3 h 时摄入的酒精经过吸收和分解的剩余量．利用 3 h 以后的数据用非线性最小二乘法拟合，可得

$$\begin{cases}k_2=0.180\,9\\B=64.782\,1\end{cases}$$

然后将 k_2 代入（1）式，用所有的数据进行拟合，可求得

$$\begin{cases}k_1=2.056\,7\\A=-112.442\end{cases}$$

令 $D=\dfrac{k_1}{(k_2-k_1)V_2}$，则 $A=\dfrac{m}{D}$，（1）式变为

$$\begin{cases} c(t)=\dfrac{m}{D}(e^{-k_1t}-e^{-k_2t})+c_0e^{-k_2t}, & t\in[0,3] \\ c(t)=\dfrac{m}{V_2}e^{-k_2t}+c_0e^{-k_2t}, & t\in[3,24] \end{cases}$$

因为 A 是喝了 2 瓶啤酒，D 可定，故拟合 2 瓶啤酒的模型为

$$c(t)=-112.442(e^{-2.0567t}-e^{-0.1809t})+c_0e^{-0.1809t}$$

3.2　模型 2　较长时间饮酒的情况

在较长时间内饮酒的情况下，可考虑以一个恒定的速率向吸收室输入酒精，而吸收室、中心室的过程不变，如图 3 所示.

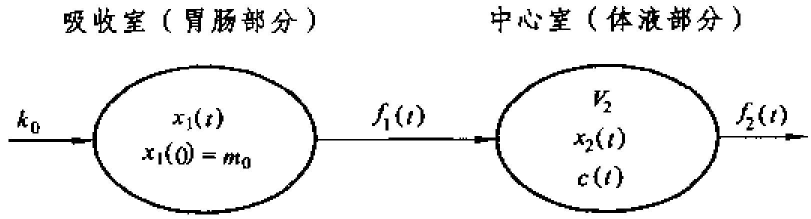


图 2

给药时间为 2 h，被吸收进体液的酒精含量为 m_0，则 $k_0=\dfrac{m_0}{2}$.

对吸收室，有

$$\begin{cases} f_1(t)=k_1x_1(t) \\ x_1'(t)=k_0-f_1(t) \quad\Rightarrow\quad f_1(t)=k_0(1+e^{-k_1t}) \\ x_1(0)=0 \end{cases}$$

对中心室，有

$$\begin{cases} x_2'(t)=f_1(t)-f_2(t) \\ x_2(t)=c(t)V_2 \\ f_2(t)=k_2x_2(t) \\ c(0)=c_0 \end{cases} \quad t\in[0,5]$$

$$\begin{cases} x_2'(t)=-f_2(t) \\ x_2(t)=c(t)V_2 \\ f_2(t)=k_2x_2(t) \\ c(0)=c_0 \end{cases} \quad t\in[5,24]$$

根据问题 1 的求解思想和方法可得在较长时间内喝 3 瓶啤酒的模型：

$$c(t)=-112.42(e^{-2.0567t}-e^{-0.1809t})+\left(c_0-\frac{k_0}{k_2V_2}\right)e^{-0.1809t}+\frac{k_0}{k_2V_2} \tag{3}$$

4 问题的解释

4.1 问题 1 的解释

定性分析：一个人的解酒功能在一天中的不同时间是不一样的，白天的解酒功能较强（白天肝分泌的解酒酶较多），晚上的解酒功能较差．人在正常生理条件下，即不从外界吸收酒精的情况下，人体的细胞自身也会产生酒精，每天大约 30 ml．这 30 ml 酒精也由肝分解掉，由此人的身体始终有一个原始酒精浓度．但此浓度相当小，计算发现大约为百分之零点二．当大李饮酒 6 h，体内酒精浓度低于 20 mg/百毫升，但这个浓度比人在正常情况下的酒精浓度高得多，所以在大李饮第二瓶啤酒后，体内的酒精浓度比喝第一瓶啤酒的时候还要高，因此经过 8 h 后，大李体内的酒精浓度还大于 20 mg/百毫升．

定量分析：根据求得的模型：

$$c(t) = -112.442\times 0.5(e^{-2.0567t} - e^{-0.1809t}) + c_0 e^{-0.1809t}$$

把中午 12 点作为起始时间，则在下午 6 点的酒精浓度为 $c(6) = 18.9893$；在下午 6 点到凌晨 2 点的时间段内，把下午 6 点的酒精浓度作为初始浓度，则凌晨 2 点的酒精浓度为 $c(8) = 20.7127$．

4.2 问题 2 的解释

（1）将模型 1 的结果，代入

$$-112.442\times 1.5(e^{-2.0567t} - e^{-0.1809t}) + c_0 e^{-0.1809t} \geqslant 20$$

解出 t 的取值范围：$0\leqslant t\leqslant 11$．

（2）将模型 1 的结果，代入

$$\frac{k_0}{(k_2-k_1)V_2}(e^{-k_1t} - e^{-k_2t}) + \left(c_0 - \frac{k_0}{k_2V_2}\right)e^{-k_2t} + \frac{k_0}{k_2V_2} \geqslant 20$$

解出 t 的取值范围：$0\leqslant t\leqslant 12$．

4.3 问题 3 的解释

直接对（2）式求导，得到 $c(t)$ 的稳定点为 $t = 1.2959$；对（3）式求导得到的稳定点为 $t = 3.3101$．

4.4 问题 4，5 的解答

如果司机每天都饮酒，则由（2）式可看出，当司机体内的酒精含量低于 20 mg/百毫升时可以驾驶，但与饮酒量有密切关系，一次饮酒量一定要少．

医学界对人体的生理功能进行研究后发现，人体肝脏分泌出的解酒酶，不同的人有不同的速率．就一般情况而言，酒精在人体内的分解速率与体内的浓度成正比．由上面的模型分析可以知道，酒精的吸收过程较快，而酒精的分解则较缓慢．酒精对人的大脑有一个持续过

程，少量饮酒可以使人兴奋，但是过量饮酒则对大脑有麻醉作用．不开车的情况下可以喝酒，但又要开车的司机若想喝一点，切记不可过量，同时注意休息一段较长时间后再开车．

5　模型的评价

模型的优点在于两种模型都能较好地解释日常生活的饮酒问题，模型中的系统参数从药物动力学的角度来解释它们是“房室间隔”对酒精的渗透能力，极大地简化了问题的处理难度，把数据分开对待，用非线性最小二乘法拟合颇有独到之处．利用所得公式计算相应 $c(t)$ 的浓度并和时间 t 的图形作比较，其结果是令人满意的．

模型的不足在于由于人的身体条件不同，因此分解酒精的水平也不同，而这里只能按一个大体标准来衡量．

参 考 文 献

[1]　叶其孝．大学生数学建模竞赛辅导教材（一）．湖南：湖南教育出版社，1993

[2]　姜启源．数学模型（第三版）．北京：高等教育出版社，2003

[3]　薛毅．数学建模基础．北京：北京工业大学出版社，2004

[4]　陈新谦，金有豫．新编药物学．北京：人民卫生出版社，1985

DVD 在线租赁策划模型

柳　麟　肖辉龙　彭密肴

【摘　要】本问题是 DVD 在线租赁的策划问题．它涉及网站对 DVD 流通的预测与运筹，其问题的关键是市场运行管理中，怎样预测 DVD 的最小购买量与如何健全租赁体制，进而提高客户服务系统中会员的满意度指数．根据强大数定理与优化理论，针对问题中的三个实际问题，分别建立了线性整数规划模型、0-1 整数规划模型和多目标整数规划模型．运用软件 Lingo8.0 分别编程并进行计算，得到了相关问题的主要结果：

问题 1：50%以上的会员在一个月内能看到准备的该 DVD（DVD1～DVD5）的最少数量

6 250　　3 125　　1 563　　782　　313

95%以上的会员在三个月内能看到准备的该 DVD（DVD1～DVD5）的最少数量

3 960　　1 980　　990　　495　　200

问题 2：在线会员最大满意度为 151.244 4．

问题 3：20 种 DVD（D001～D020）的购买量分别为

10　5　10　7　7　6　9　13　12　7　9　8　11　9　13　7　10　9　13　5

并对网站市场经营管理中的实际问题作进一步分析，再根据会员流量密度将系统作动态化处理，提出了一些具体的改进方案．

【关键词】策划　运筹　模型

1　问题重述

随着信息时代的到来，网络成为人们生活中越来越不可或缺的元素之一．各种在线服务层出不穷，其中 DVD 在线租赁就是具有代表性的一个．顾客缴纳一定数量的月费成为会员，订购 DVD 租赁服务．会员对哪些 DVD 有兴趣，只要在线提交订单，网站就会通过快递的方式尽可能地满足要求．会员提交的订单包括多张 DVD，这些 DVD 是基于其偏爱程度排序的．网站会根据手头现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发．每个会员每个月租赁次数不得超过 2 次，每次获得 3 张 DVD．会员看完 3 张 DVD 之后，只需要将 DVD 放进网站提供的信封里寄回（邮费由网站承担），就可以继续下次租赁．请考虑以下问题：

（1）网站正准备购买一些新的 DVD，并通过对 1 000 个会员的问卷调查，得到了愿意观看这些 DVD 的人数，又根据以往情况掌握了每月租赁不同类会员之间的比例．若现有 10 万会员，应该如何购置 DVD 才能保证至少 50%的会员在一个月内能够看到他想看的 DVD？如果要求保证在三个月内有至少 95%的会员能够看到该 DVD 呢？

（2）根据会员在线订单，应如何对 DVD 进行分发，才能使会员获得最大的满意度？请具体列出前 30 位会员分别获得哪些 DVD.

（3）假设表 2 中 DVD 的现有数量全部为 0，那么应如何决定每种 DVD 的购买量，以及如何对这些 DVD 进行分发，才能使 95%的会员在一个月内得到他想看的 DVD，并且满意度最大？

2　基本假设及符号说明

2.1　符号说明

x_{ij} —— 第 j 种 DVD 对第 i 个会员的分发情况（0 表示没有分发，1 表示分发）；

z_{ij} —— 第 i 个会员对第 j 种 DVD 的偏爱程度；

s_{ij} —— 第 i 个会员对第 j 种 DVD 的满意度；

b_j —— 第 j 种 DVD 的购买量；

c_j —— 第 j 种 DVD 现存数量；

A_m —— 对第 m 种 DVD 观看的人数；

V_m —— 对 m 种 DVD 的购买量；

M —— 调查的会员人数；

N —— 总会员人数；

K —— DVD 的现存种类；

R —— 在线订单人数.

（$i = 1, 2, \cdots, 100$；$j = 1, 2, \cdots, 20$；$m = 1, 2, 3, 4, 5$）.

2.2　基本假设

（1）会员获得的 DVD 均在他的在线订单中；

（2）每个会员每个月租赁次数不得超过 2 次，每次为 3 张不同 DVD；

（3）每个月租赁 1 次的会员为 I 类会员，以 30 天为一个租赁周期；

（4）每个月租赁 2 次的会员为 II 类会员，以 15 天为一个租赁周期；

（5）租赁时会员需将所租 DVD 返还网站后，方可进行下一次租赁；

（6）网站允许用户租赁的时间最长只能为一个月.

3　模型的分析与建立

3.1　问题 1 的模型

基于网络市场的实际与题中信息，可以认为每个会员每个月至少提交 1 次租赁订单，且 60%的会员一个月内有 2 次租赁，40%的会员一个月只有 1 次租赁要求. 租赁时会员需将所

租 DVD 返还网站后，方可进行下一次租赁，而网站对会员所租 DVD 的服务期无严格限制，具体分发时网站将根据现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发. 因此，根据上述分析，我们作出了上述的基本假设.

3.1.1 模型 1

由上述分析与基本假设，每月租赁 1 次与 2 次的会员分别以 15 天和 30 天为租赁周期，其 DVD 分发网络如图 1 所示.

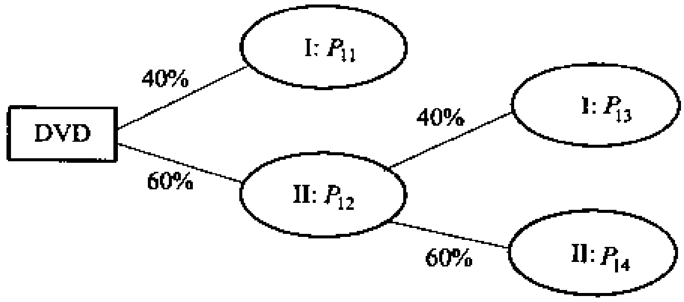


图 1

即 DVD1 在月初进行分发时分成 P_{11}，P_{12} 两部分：P_{11} 表示第 I 类会员中获得 DVD1 的会员数量；同样 P_{12} 就是在第 II 类会员中获得 DVD1 的会员数量. 当然，P_{11} 与 P_{12} 之和也就是我们应购买的 DVD1 数量. 于是首先得到目标函数

$$\min \quad V_1 = P_{11} + P_{12} \tag{1}$$

在经过 15 天后，P_{12} 张 DVD 就可返还回来，紧接着又做第 2 次分发，将这 P_{12} 张 DVD 分发给在第 1 次分发中未能得到 DVD 的会员，其中分发到第 I 类会员与第 II 类会员的 DVD 数量分别为 P_{13}，P_{14}，于是有

$$P_{12} = P_{13} + P_{14} \tag{2}$$

那么目标函数就可转化为

$$\min V_1 = P_{11} + P_{13} + P_{14} \tag{3}$$

这里应该注意的是，第 I 类会员与第 II 类会员的具体会员事先是不确定的，那么不能主观地认为某些编号的会员就是属于第 I 类会员或第 II 类会员. 根据随机分布的有关原理，这里相对稳定且可预测的就是此两类会员的人数比，它是稳定在已知频率之比的一个极小邻域内，于是有

$$0.6P_{11} = 0.4P_{12} \tag{4}$$

根据强大数定理，当样本空间充分大时，事件发生的频率稳定于概率，当月在进行第 2 次分发时，可理解为

$$0.6P_{13} = 0.4P_{14} \tag{5}$$

由于希望看到 DVD1 的会员中获得过 DVD1 的会员数至少有 50%，因此，有

$$P_{11} + P_{12} + P_{13} + P_{14} \geqslant 50\% \frac{A_1}{M} N \tag{6}$$

综上所述，我们得到了关于解决 DVD1 购置问题的模型

$$\min \quad V_1 = P_{11} + P_{13} + P_{14}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} P_{12} = P_{13} + P_{14} \\ 0.6P_{11} = 0.4P_{12} \\ 0.6P_{13} = 0.4P_{14} \\ P_{11} + P_{12} + P_{13} + P_{14} \geqslant 50\% \dfrac{A_1}{M} N \\ P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14} \text{为非负整数} \end{cases} \tag{7}$$

基于这 5 种 DVD 的相同分发方式，可将模型推广，得到 DVD 购置的一般模型

$$\text{s.t.} \begin{cases} P_{k2} = P_{k3} + P_{k4} \\ 0.6P_{k1} = 0.4P_{k2} \\ 0.6(P_{k3} + P_{k1}) = 0.4P_{k4} \\ P_{k1} + P_{k2} + P_{k3} + P_{k4} \geqslant 50\% \dfrac{A_k}{M} N \\ P_{k1}, P_{k2}, P_{k3}, P_{k4} \text{为非负整数} \end{cases} \tag{8}$$

3.1.2 模型 2

根据模型 1 的分析，得知一个月内一部分 DVD 将流通 1 次，而另一部分 DVD 将流通 2 次. 因此，三个月内，DVD 流通动态网络图如图 2 所示.

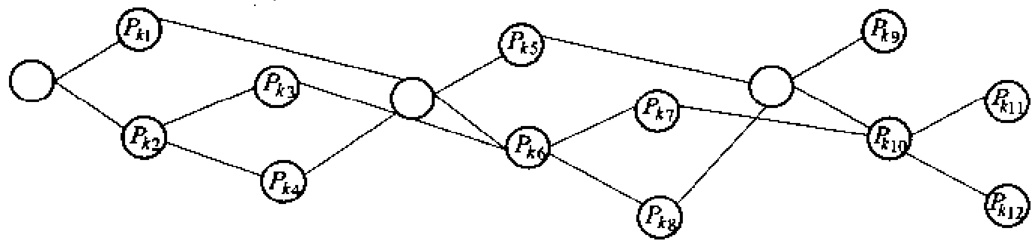


图 2

第 1 次分发每种 DVD 的情况为 $P_{k1} + P_{k2}$，而要使 DVD 得到充分利用，则第一个月租出的 DVD 的数量为 DVD 的购买量，那么目标函数为

$$\min \quad V_k = P_{k1} + P_{k2} \tag{9}$$

观察图 2，不难得出约束条件，即

$$\left.\begin{aligned} P_{k2} &= P_{k3} + P_{k4} \\ P_{k3} + P_{k6} &= P_{k7} + P_{k8} \\ P_{k7} + P_{k10} &= P_{k11} + P_{k12} \\ p_{k1} + P_{k4} &= P_{k5} + P_{k6} \\ P_{k5} + P_{k8} &= P_{k9} + P_{k10} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

当样本空间充分大时，根据马氏链的平稳性，在以后每次分发中，仍然可以认为两类会员的比率保持稳定，于是有

$$
\left.\begin{array}{l}
0.6P_{k1}=0.4P_{k2} \\
0.6(P_{k1}+P_{k3})=0.4P_{k4} \\
0.6(P_{k5}+P_{k3})=0.4P_{k6} \\
0.6(P_{k7}+P_{k5})=0.4P_{k8} \\
0.6(P_{k9}+P_{k7})=0.4P_{k10} \\
0.6(P_{k11}+P_{k9})=0.4P_{k12}
\end{array}\right\} \tag{11}
$$

且

$$
\sum_{n=1}^{12} P_{kn} \geqslant 95\% \frac{A_k}{M} N \quad P_{kn}\text{为非负整数} \tag{12}
$$

3.2 问题 2 的模型（模型 3）

由于网络市场在线 DVD 租赁时，顾客缴纳一定数量的月费就成为会员，并获得订购 DVD 租赁服务．会员对哪些 DVD 有兴趣，只需在线提交订单．会员提交的订单包括多张 DVD，这些 DVD 是基于其偏爱程度排序的．因此，我们认为当会员得到自己最偏爱的 DVD 时，其满意度是最高的，并随着会员的偏爱程度的序号增大而递减．又因会员所偏爱的 DVD 有所不同，网站会根据手头现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发，并通过快递的方式尽可能满足要求．因此，满意度 s_{ij}（其中 s_{ij} 表示第 i 位会员希望获得第 j 种 DVD 产生的满意度）与偏爱程度 z_{ij}（其中 z_{ij} 为题中表 2 的常数矩阵，它表示第 i 位会员对第 j 种 DVD 的偏爱程度）之间的关系可合理的表示为

$$
s_{ij}=\begin{cases}0, & z_{ij}=0 \\ \dfrac{1}{z_{ij}}, & z_{ij}>0\end{cases} \tag{13}
$$

引入 0-1 变量 x_{ij}，当 $x_{ij}=0$ 时，表示第 j 种 DVD 不分发给第 i 位会员；当 $x_{ij}=1$ 时，表示第 j 种 DVD 分发给了第 i 位会员．于是本问题的目标函数为

$$
\max \quad S=\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{K}(s_{ij}\times x_{ij})\ \text{（}R\text{ 为在线订单会员数，}K\text{ 为 DVD 的种类）} \tag{14}
$$

这里在线订单会员数 $R=100$，DVD 种类 $K=20$．考虑到总的 DVD 库存数量 $\sum_{j=1}^{K} C_j$ 的限制和在线订单会员人数的实际，每次分发时，当 DVD 全部分发出去后，本次可能有部分会员不能获得想看的 DVD．因此，会员得到该 DVD 的情况有两种：

$$
\sum_{j=1}^{K} x_{ij}=3 \quad \text{或} \quad \sum_{j=1}^{K} x_{ij}=0 \tag{15}
$$

为了方便，引入 y_i（0-1 变量），上式即每个会员所获得的 DVD 数量可表示为

$$
\sum_{j=1}^{K} x_{ij}=3y_i, \quad (i=1,2,\cdots,R) \tag{16}
$$

确定约束条件，每种 DVD 租赁不能超出该 DVD 的库存数量，有

$$\sum_{i=1}^{R} x_{ij} \leqslant c_j, \quad (j=1,2,\cdots,k)$$

即该模型为

$$\max S = \sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{K}(s_{ij} \times x_{ij}) \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{R} x_{ij} \leqslant c_j, \quad (j=1,2,\cdots,K) \\ &\sum_{j=1}^{K} x_{ij} = 3y_i, \quad (i=1,2,\cdots,R) \\ &x_{ij}, \quad y_i = 0 \text{ 或 } 1 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

3.3　问题 3 的模型（模型 4）

本问题为如何决定每种 DVD 的购买量，以及如何对这些 DVD 进行分配，才能使 95%的会员在一个月内得到他想看的 DVD，并且满意度最大，即要求满意度最大且购入的 DVD 数量最小．因此，该问题是一个多目标规划问题，其目标为

$$\left.\begin{aligned} &\min\ W = \sum_{j=1}^{K} b_j \\ &\max S = \sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{K}(s_{ij} \times x_{ij}) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

本问题的关键是网站成本及优化流通，由于有 60%的会员每月租赁 DVD 2 次，根据强大数定理，应有 60%的 DVD 在一个月内将进行 2 次分配．为了降低成本，又要满足 95%的会员看到自己希望要看的 DVD，从这两个角度出发，可以假定在一个月内新购 DVD，每个会员仅租赁 1 次．综上所述，得到了新购 DVD 分发流通的约束条件

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{K} x_{ij} + 60\%\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{K} x_{ij} \geqslant 95\% \times 100 \times 3 \\ &\sum_{j=1}^{K} x_{ij} = 3y_i, \quad y_i = 0 \text{ 或 } 1 \\ &\sum_{i=1}^{R} x_{ij} = b_j, \quad x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

此外，模型为多目标规划，涉及应如何调整属性的问题．面对属性确定而言，一般情况下，应依据第一步中所了解的“决策人”的喜好来确定，或者是根据该目标函数在“决策群”所起的作用即这个目标函数的重要性来确定，而重要的是，所有目标函数的属性和（设λ_i 为目标函数 f_i 的属性）满足 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$．接下来考虑到满意度与成本之间的重要性关系．会员满意度是网站继续发展下去的关键，如果只有很少或没有会员对网站满意，那么网站的失败是必然的．但一味追求会员满意度，而造成成本过高，将使得网站入不敷出，网站也就失去生存

意义．我们认为满意度与 DVD 的购买量同等重要，即$\lambda_1=\lambda_2=0.5$．因此，可将该多目标模型转化为单目标规划模型

$$\min \quad W=0.5\sum_{j=1}^{K}b_j-0.5\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{K}(A_{ij}\times x_{ij}) \tag{21}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{K}x_{ij}=3y_i\\ \sum_{i=1}^{R}x_{ij}=b_j\\ \sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{K}x_{ij}+60\%\sum_{i=1}^{R}\sum_{j=1}^{K}x_{ij}\geqslant 95\%\times 100\times 3\end{array}\right\} \tag{22}$$

4 模型的求解

4.1 问题 1 的求解

问题 1．其中 $A_m=[200\ \ 100\ \ 50\ \ 25\ \ 10]$；$M=1\ 000$；通过 Lingo8.0 编程（程序见附页 2program1.lg4 和 program2.lg4）得到最终结果：

若 50%以上的会员在一个月内能看到该 DVD（DVD1～DVD5），那么准备的数量至少为

6 250　3 125　1 563　782　313

若 95%以上的会员在三个月内能看到该 DVD（DVD1～DVD5）那么准备的数量至少为

3 960　1 980　990　495　200

4.2 问题 2 的求解

问题 2．其中 DVD 的种类为 $j=20$，在线订单人数 $R=100$，在线订单会员对各种 DVD 的偏爱程度，现存数量

$C_j=[8,\ 1,\ 22,\ 10,\ 8,\ 40,\ 40,\ 1,\ 8,\ 15,\ 19,\ 20,\ 10,\ 2,\ 5,\ 8,\ 30,\ 10,\ 8,\ 38]$

通过 Lingo8.0 编程（见程序附页 2program3.lg4）得到如下结果：表 1 为各种 DVD 的分配情况：最大满意度为：151.244 4．

表 1

会员编号	分配 DVD 编号		
C001	D003	D017	D020
C002	D001	D006	D012
C003	D013	D017	D020
C004	D007	D012	D017
C005	D006	D007	D019
C006	D006	D012	D015

续表 1

会员编号	分配 DVD 编号		
C007	D007	D011	D020
C008	D012	D013	D014
C009	D003	D007	D015
C010	D010	D012	D017
C011	无	无	无
C012	D007	D011	D019
C013	D006	D019	D020
C014	D006	D016	D017
C015	D007	D017	D020
C016	D007	D011	D017
C017	D004	D007	D017
C018	D007	D018	D020
C019	D006	D011	D017
C020	D006	D009	D020
C021	D006	D013	D015
C022	D003	D007	D011
C023	D011	D012	D013
C024	D007	D011	D017
C025	D010	D016	D017
C026	D003	D006	D016
C027	D006	D007	D010
C028	D005	D007	D009
C029	D012	D013	D020
C030	D003	D011	D017

4.3　问题 3 的求解

问题 3．我们利用程序（program4.lg4）按顺次求解方法，得到每种 DVD 的购买量

$$B_j = 10, 5, 10, 7, 7, 6, 9, 13, 12, 7, 9, 8, 11, 9, 13, 7, 10, 9, 13, 5$$

一共有 180 张 DVD，分配方案如下：首先将 180 张 DVD 分配给 60 个会员，在这 60 个会员当中，约有 24 人应是一个月租赁 1 次 DVD 的会员，另外，约有 36 人是一月租赁 2 次 DVD 的会员，在当月中旬之前第Ⅱ类会员将返回 108 张 DVD 进行第 2 次分发．其最大满意度为：183.333 3（本问题的分配方案不唯一）．

5　结果分析

结果分析：

（1）根据计算结果，虽然对每种特定的 DVD 会员，所想要看的 DVD 有些不同，且租赁周期也有所不同，但在分发过程中，我们所购买的 DVD 在第一次分发时均应被全部分发．在一定周期内，能找到合理的分发方案，满足会员满意度最大且网站购入 DVD 数量最小的双重指标．

（2）在 DVD 的分发过程中，由于模型要求考虑会员整体的满意度的最大化，因此，在分发过程中，部分会员有可能在短期内不能获得到 DVD，只得在下次的配发过程中再将他所想要的 DVD 配发给这些会员．本问题提出的情况是一些特殊情形．事实上，网站每天将分批次处理大量 DVD 租赁订单，为提高 DVD 流通速度，网站管理中心将会尽量缩短 DVD 在中心的存储时间，可理解为随时分发返回 DVD，这样即使要等到下一批次的配发，会员也不会觉察到时间上的差异．

（3）综合考虑成本以及会员满意度的关系，认为二者同等重要．通过本问题的实施，结果与表中实际数据基本稳合．因此，商家的经济效益与社会声誉并不矛盾．

6 模型的评价、改进及推广

根据已知模型与现实情况，若使分发次数增大，即在 DVD 的流通量不变的前提下，使得流通速度不断增加，则可使得以较少的 DVD 尽可能地满足绝大多数会员．若已知有哪些会员每个月的租赁次数为 2 次，则可先将 DVD 分发给他们，即只要等到本月中旬，就可再次分发，像这样每月皆优先考虑第Ⅱ类会员，其实是增大了 DVD 的流通速度，即在较短的时间内绝大多数会员都能被满足．这样做还有一个好处就是，因为第Ⅱ类会员返还 DVD 速度快，那么长此下去，每天返还的 DVD 与每天发出的 DVD 就形成一个连续流动的平衡态，于是即使忽略了等待某种 DVD 所需要的时间，那么在网络各个分发中心周围的会员也基本上不需要等待已租出的 DVD 就可得到自己想看的 DVD．而分发中心也无需进行整日整月的分发，只需根据每日流回的 DVD 以及随之而到的订单便可随时进行再次分发，进而使分发过程连续不断．

此外，对于问题 1 的第 2 问，本文从转移的情况，认为第Ⅰ类与第Ⅱ类人的比例在下一个月中仍然保持恒定，从马尔柯夫链平稳分布来看也是可行的．但是如果对以往数据的分析中也可以考虑另一种假设，认为从一个状态开始，随第 1 次的分发，部分会员将退出 DVD 流通系统，根据会员流量密度将系统动态化处理，这里思考了一些具体的改进方案，但通过实际 program5.lg4 计算，发现其误差相对较小．因此，本模型在网络市场上及其他动态流通系统中均有一定的推广价值．

参 考 文 献

[1] 韩中庚．数学建模方法及其应用（第一版）．北京：高等教育出版社，2005

[2] 胡运权．运筹学基础及应用（第三版）．哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2000

DVD 在线租赁模型

蓝代敏　赖天娥　吴厚光

【摘　要】本文结合 DVD 在线租赁的特点，全面分析了网站的 DVD 现有库存量和广大会员对不同类型的 DVD 的偏爱程度，同时考虑到要最大限度地控制网站对 DVD 的购买量，建立了 DVD 的需求预测模型、分配模型、购买-分配模型．在模型Ⅰ中，通过对表 1 的数据分析，结合租赁周期，建立了方程组，运用 Matlab 6.0 进行计算，得出 5 种 DVD 应准备的数量．在模型Ⅱ中，结合非线性规划和 0-1 规划的优点，用 Execl 对数据进行加工，并运用 Lingo8.0 编程计算得到 DVD 的最佳分配方案（见文中表 1）．在模型Ⅲ中，同时对 DVD 的需求、购买和分配作了分析，综合模型Ⅰ和模型Ⅱ，使得在线租赁方案更加优化，得到了 D001～D020 的购买量以及分配方案．最后，采用排队论中标准 M/M/C 模型的思想，对模型作了进一步的改进，进而得出更符合实际情况的结果．

【关键词】满意度　偏爱程度　非线性规划　0-1 规划　排队论　标准 M/M/C 模型

1　问题重述

随着信息时代的到来，DVD 在线租赁已是一种可行的服务．在线 DVD 租赁问题中，顾客缴纳一定数量的月费成为会员，可得到 DVD 租赁服务．在该问题中，通过市场需求来确定网站 DVD 的购买量以及如何分配这些 DVD．会员在线提交的订单包括多张 DVD，这些 DVD 是基于其偏爱程度排序的．网站会根据手里现有的 DVD 数量和会员的订单进行分发．每个会员每个月租赁次数不得超过 2 次，每次获得 3 张 DVD．会员看完 3 张 DVD 之后，将 DVD 寄回，方可继续下次租赁．

现考虑下面三个问题：

问题 1：通过对 1 000 个会员调查结果的分析，预测出 10 万个会员的订单分布情况，从而分别确定出在一个月内（三个月内）至少有 50%（95%）的会员能欣赏到他所期望看到的 DVD．网站应该准备的 DVD 的数量．

问题 2：根据网站 DVD 现存量及会员在线订单，确定最佳分配方案，使会员获得最大满意度，并列举出会员 C001～C030 的分配量．

问题 3：当 DVD 现存量为零时，根据会员在线订单，决定每种 DVD 的购买量及 DVD 最佳分配方案．

2 符号说明及模型假设

2.1 符号说明

N_j——第 j 种 DVD 需准备的张数（单位：张）；

K_j——能看到第 j 种 DVD 的人数占愿看人数的百分比；

μ_j——愿看第 j 种 DVD 的人数占愿看人数的百分比；

k——能看到 DVD 的人数占所有会员的百分比；

c_j——第 j 种 DVD 的现有数量（单位：张）；

C——DVD 现有数量；

α_{ij}——第 i 个会员对第 j 张 DVD 的偏爱程度；

β_{ij}——第 i 个会员获得第 j 张 DVD 的满意度；

B——β_{ij} 所构成的矩阵（β_{ij}），其中 $1\leqslant i\leqslant 100$，$1\leqslant j\leqslant 20$；

n——在线会员的人数（单位：人）；

T——租赁周期（单位：天）；

Y——所有会员的满意度；

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & \text{第 } i \text{ 个人没有看到 } j \text{ 类 DVD}\\ 1, & \text{第 } i \text{ 个人看到 } j \text{ 类 DVD}\end{cases}.$$

2.2 基本假设

（1）会员入会后不考虑其退出的情况；

（2）邮寄过程中不会出现 DVD 意外丢失、损坏或不能到达目的地等情况；

（3）会员租赁 DVD 有一定的循环周期 T，在周期 T 内会员及时看完 DVD 并将其寄回网站；

（4）网站中每位会员每月都会向网站提交 1 次或 2 次订单，每次获得 3 张 DVD；

（5）会员将上次所租碟片还回网站后，方可继续下次租赁（以网站收到碟片为准）；

（6）对每种 DVD 来说，愿意观看的会员数占网站总会员数（10 万）的比率与调查结果一致．

3 问题分析与模型建立

DVD 在线租赁面向会员提供日益专业化和便捷化的服务，同时这也使得 DVD 在线租赁网站面临着 DVD 的需求预测、购买和分配问题．本问题要求每个会员每个月租赁次数不得超过 2 次，每次获得 3 张 DVD，则会员只可能租到 3 张或 6 张 DVD．

3.1 模型 1（DVD 需求预测模型）

问题 1．从长远来看，每个月的天数相差很小，可近似认为每个月的天数均为 30 天．每个会员每个月租赁次数不得超过 2 次，且网站是用邮寄的方式租出并收回 DVD，单面邮寄时

间一般需 3 天，网站允许会员保留 7～8 天．由此，我们可以近似地认为周期 $T=15$ 为较合理的租赁周期．由周期 T，可得到一个月 1 张 DVD 可供租赁的次数最多为 $30/T$ 次．

根据调查结果，可知愿意观看某种 DVD 的会员人数占网站总会员人数的比率为

$$\mu_j=\frac{\text{愿意观看第 } j \text{ 种 DVD 的会员人数}}{\text{会员总人数}}\times 100\%$$

解得

$$\mu_1=20\%,\quad \mu_2=10\%,\quad \mu_3=5\%,\quad \mu_4=2.5\%,\quad \mu_5=1\% \tag{1}$$

设 N_j 表示需购买的第 j 种 DVD 的数量，则 $\frac{30}{T}\times N_j$ 可表示 N_j 张 DVD 一个月内可供租赁的次数．根据常识，每位会员不会在一个月内对同一种 DVD 提交超过 1 次的订单，则 $\frac{30}{T}\times N_j$ 张 DVD 一个月内可供 $\frac{30}{T}\times N_j$ 个会员租赁；而租赁的人数又可表示为 $1\,000\times\mu_j\times k$，从而可建立关系式

$$\frac{30}{T}\times N_j=100\,000\times\mu_j\times k$$

即

$$N_j=100\,000\times\mu_j\times k\times\frac{T}{30} \tag{2}$$

问题 1 的目的是寻求各种 DVD 所需的最小量．其中 μ_j，T 均为常量，一个月内保证至少 50%的人能看到自己所希望看到的 DVD，即 $k\geq 50\%$．要求 N_j 的极小值，只需 k 的取值最小．则

$$k=50\% \tag{3}$$

从而由（1），（2），（3）式可建立如下模型：

$$\begin{cases}N_j=100\,000\times\mu_j\times k\times\dfrac{T}{30}\\ k=50\%\\ \mu_1=20\%,\ \mu_2=10\%,\ \mu_3=5\%,\ \mu_4=2.5\%,\ \mu_4=1\%\end{cases}$$

代入数据，用 Matlab6.0（程序见 1.JM2005D1.m）解得

$$N_1=5\,000,\quad N_2=2\,500,\quad N_3=1\,250,\quad N_4=625,\quad N_5=250$$

同理当时间变为三个月，$k\geq 95\%$时，有如下模型：

$$\begin{cases}\dfrac{90}{T}\times N_j=100\,000\times\mu_j\times k\\ k=95\%\\ \mu_1=20\%,\ \mu_2=10\%,\ \mu_3=5\%,\ \mu_4=2.5\%,\ \mu_5=1\%\end{cases}$$

（程序见 2.JM2005D2.m）解得结果为

$$N_1=3\,167,\quad N_2=1\,584,\quad N_3=792,\quad N_4=396,\quad N_5=396$$

3.2 模型 2（DVD 分配模型）

3.2.1 问题 2 的分析

该问题是在一定约束条件下的最优化问题．现有 100 位会员已向网站提交订单，其中每位会员对各种 DVD 的偏爱程度都有所差异，同时又由于 DVD 的现有数量有限，无法满足每位会员都看到他们所偏爱的(即想看的)DVD 种类.因此，为了兼顾会员和网站双方的利益.本文应以满足会员的主观意愿为主，使会员获得最大的满意度，从而形成稳定的消费群体．综上所述，该问题归结为：网站尽量根据每位会员对各种 DVD 的不同偏爱度，找到一种最佳的分配方案．

网站越能满足会员的偏爱，会员的满意度就会越大，即会员的偏爱度与满意度成正比．又有偏爱值越小表示会员的偏爱程度越高，故会员的满意度β_{ij}应与偏爱值α_{ij}成反比，即可用如下关系式表示：

$$\beta_{ij}=\begin{cases}0, & a_{ij}=0\\ \dfrac{1}{a_{ij}}, & a_{ij}>0\end{cases}$$

3.2.2 问题 2 的模型建立

由前面分析可知，DVD 分配是一个多约束条件下的最优化问题．若确定了各种 DVD 的最佳分配，也就解决了所有会员的最大满意度问题，则建立如下的非线性规划与 0-1 规划相结合的模型（DVD 分配模型）：

目标函数

$$\max \quad Y=\sum_i\sum_j x_{ij}\beta_{ij} \tag{4}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\left(\sum_j x_{ij}-3\right)\left(\sum_j x_{ij}-6\right)=0 & (5)\\ \sum_j x_{ij}=n\times 60\%\times 2\times 3+n\times 40\%\times 3 & (6)\\ \sum_i x_{ij}\leqslant c_j\times\dfrac{30}{T} & (7)\\ \beta_{ij}>0 & (8)\\ x_{ij}=0 \text{ 或 } 1 & (9)\end{cases}$$

其中，$n=100$ 人，$T=15$ 天，$i=1,2,\cdots,100$，$j=1,2,\cdots,20$.

目标函数与约束条件的分析：

（4）式：目标函数为会员获得最大满意度.

（5）式：每月租赁次数约束：本问题中每个会员每个月租赁次数不得超过 2 次，每次获得 3 张 DVD，则会员只可能租到 3 张或 6 张 DVD.

（6）式：DVD 总流动张数的约束.

（7）式：获得某种 DVD 的总会员数要受该 DVD 在某段时间内可供租出的次数的约束.

（8）式：只需考虑在线订单中会员的偏爱程度，这可使计算过程中时间复杂度和空间复

杂度大大降低.

(9) 式：x_{ij} 的取值服从 0-1 规划，即 x_{ij} 只能等于 0 或 1.

3.2.3 问题 2 的模型求解

(1) 模型参数的确定.

将表 2 中会员 C0001～C0100 对碟片 D001～D020 的偏爱程度视为矩阵. 由前面分析，利用 Microsoft Excel 软件对矩阵中的非零元素求其倒数，零元素保持不变可得到β_{ij} ($i=1,2,\cdots,100$；$j=1,2,\cdots,20$)（见附录一）.

第 j 种 DVD 的现有数量 C_j 对应值为

[8，1，22，10，8，40，40，1，8，15，19，20，10，2，5，8，30，10，8，38]

$j=1,2,\cdots,20$

(2) 利用 Lingo8.0 软件求解前面给出的非线性规划与 0-1 规划相结合的模型（程序见附录二 3.JM2005D3.log）. 可计算出满意度的最大值为 169.787 0.

同时可得到 DVD 的最佳分配方案（计算结果见附录三），表 1 列出了前 30 位会员（即 C0001～C0030）分别获得 DVD 的分配方案.

表 1　前 30 位会员获得 DVD 的分配方案

会　员	DVD 编号					
C001	D003	D016	D020			
C002	D001	D003	D006	D009	D012	D015
C003	D006	D012	D013	D014	D017	D020
C004	D005	D007	D011	D012	D017	D019
C005	D006	D007	D013	D017	D019	D020
C006	D001	D003	D006	D012	D015	D016
C007	D003	D004	D007	D011	D016	D020
C008	D001	D011	D012	D013	D017	D018
C009	D003	D007	D015			
C010	D003	D010	D011	D012	D017	D018
C011	D003	D010	D013			
C012	D007	D010	D011	D013	D014	D019
C013	D006	D017	D019			
C014	D003	D006	D012	D016	D017	D018
C015	D007	D010	D011	D012	D017	D020
C016	D001	D003	D006	D007	D011	D017
C017	D004	D007	D017			
C018	D007	D011	D016	D017	D018	D020
C019	D006	D011	D017			
C020	D006	D009	D020			
C021	D003	D004	D006	D009	D013	D015

续表 1

会 员	DVD 编号					
C022	D003	D007	D011			
C023	D011	D012	D013			
C024	D007	D011	D017			
C025	D016	D017	D019			
C026	D003	D006	D016			
C027	D001	D006	D007	D010	D012	D017
C028	D007	D009	D010			
C029	D004	D005	D008	D012	D013	D020
C030	D003	D009	D017			

3.3 模型 3（DVD 购买及分配模型）

分析上述两个模型，模型 1（DVD 需求模型）主要是求各种 DVD 的需求量（相当于问题 3 所求的各种 DVD 的购买量）. 模型 2（DVD 分配模型）主要解决了在会员的最大满意度条件下 DVD 的分配方案. 问题 3 中 DVD 的购买与分配紧密相连，只有当各种 DVD 购买数量确定时，才知道如何对它们进行分配. 于是我们利用 Microsoft Excel 统计出这 100 个会员中订购第 j 种 DVD 的人数 m_j，其值分别为

[53，37，46，34，37，42，42，48，41，51，48，41，43，45，52，41，43，45，44，31]

从而

$$\mu_j = \frac{m_j}{100} \times 100\%$$

因此，我们结合模型 1 和模型 2，仍然以会员获得最大满意度为目标函数. 建立如下 DVD 购买及分配模型，目标函数为

$$\max \quad Y = \sum_i \sum_j x_{ij} \beta_{ij}$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} \dfrac{30}{T} \times N_j = 100\,000 \times \mu_j \times k \\ k = 95\% \\ \left(\sum_j x_{ij} - 3\right)\left(\sum_j x_{ij} - 6\right) = 0 \\ \sum_{ij} x_{ij} = n \times 60\% \times 2 \times 3 + n \times 40\% \times 3 \\ \sum_i x_{ij} \leqslant N_j \times \dfrac{30}{T} \\ \beta_{ij} > 0 \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

其中，$n = 100$，$i = 1, 2, \cdots, 100$，$j = 1, 2, \cdots, 20$.

本模型仍利用 Lingo8.0 进行求解，但为减小计算量，我们先在 Matlab6.0 求出各种 DVD 的购买量（程序见 4.JM2005D4.m），由于 DVD 的张数为整数，故对其向上取整后得到 D001～D020 购买量 N_j，依次为

26，18，22，17，18，20，20，23，20，25，23，
20，21，22，25，20，21，22，21，15

然后代入这些数据，在 Lingo8.0 中计算（程序见 5.JM2005D5.log），程序运行结果（见附录四），最大满意度为 185.88.

4 模型分析与检验

模型分析与检验：

（1）DVD 预测需求模型的问卷调查的统计结果具有代表性：

用于计算的统计数为随机抽样所得，由统计断原理可知这种数据有统计推断功能. 因此，我们由抽样调查的数据统计出愿意观看的会员数的占网站总会员数（10 万）的比率是合理的.

（2）设计模型的合理性：

假设的合理性直接决定模型的合理性，我们需对假设作进一步的讨论：

① 题中并未给出租赁的周期，但结合题中给出的对会员租赁限制，以及某些 DVD 租赁网站对归还时间的约定确定具体的周期 T. 这些做法虽然有一定的主观性，但在数据匮乏的情况下，不失为一种合理的处理方法.

② 本文的 1，2 两个假设，使模型不去考虑极少数的特殊情况，而使问题得到简化. 对于特殊情况，可以不需建立模型而采取相应的措施，因为特殊情况是不可预测的.

（3）模型结果与实际比较贴近：

从 DVD 的分配中任意抽取部分会员分别获得 DVD 的种类，参考表二中给出会员的偏爱程度，由这些可以看出，分析模型的结果与实际是非常接近的. 如会员 C008 获得 D001，D011，D012，D013，D017，D018. 对照表二，会员 C008 对 D001，D011，D012，D013，D017，D018 的满意度分别为：3，7，9，1，0，5. 从中可知会员 C008 获得的 6 种 DVD 有 5 种都是他所偏爱的. 由于偏爱 D017 的会员数很少，而该 DVD 的现有数量却相对较多，而每次又需租 3 张或 6 张给会员，并同时考虑到要使所有会员的满意度最大，故将 D017 分配给 C008 也是符合现实情况的. 其他会员我们也作出了类似检验，均符合现实.

5 模型的评价与改进

5.1 模型的优点

（1）综合运用 Matlab 和 Lingo 两个数学软件，准确求解. 运用 Lingo 编程可解出对现有

数量的 DVD 进行分配的具体方案，并利用 Excel 列出表格，使结果一目了然.

（2）本模型从三种情况分别建立模型，模型稳定性高，适用性强.

（3）从问题出发，分析了应该考虑的各种情况，建立了非线性规划和 0-1 规划相结合的模型进行计算，本模型计算步骤清晰，可靠性较高.

（4）此模型具有极为广泛的应用性，对每一个具体的情况，都可以通过模型求解.

5.2 模型的缺点

（1）本文模型中的某些参数仅是依靠题中给出的一些数据求解得出，与实际情况可能有一点偏差.

（2）模型中为使计算简便，使所得的结果更理想化，忽略了一些次要因素. 如，每张 DVD 的租赁周期应根据具体情况而定，而本模型是依美国一租赁公司的情况而定的；每种 DVD 相当于在 1 张 DVD 的情况下，进行求解的. 对于这些问题，由于时间关系本模型还未能更好的研究，有待以后的改进和完善.

5.3 模型的改进

在问题 1 中对 5 种 DVD 的需求量的求解中发现：由于在线订购的时间不一、人们对每种 DVD 的偏好程度不同以及每位会员租赁次数有差异等各种因素，我们所建立的模型存在一定的局限性. 然而利用排队论中的标准 M/M/C 模型能够更好地解决物品在线租赁中的问题. 现仅作简单分析如下：

根据会员的意愿提交订单后，网站先定期对其进行分类，再按会员的偏好度进行分配，此处理系统可简单由图 1 表示：

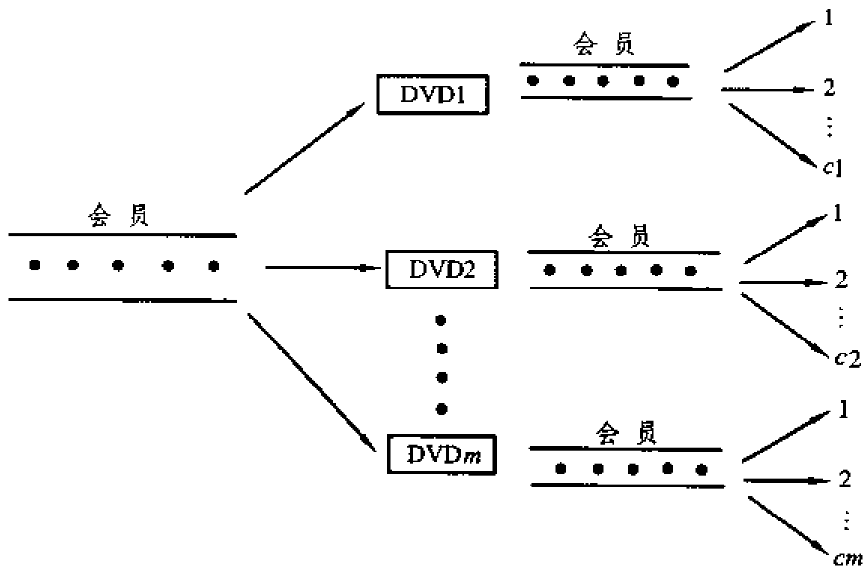


图 1

在市场竞争中，为了满足双方的利益，我们需要找到一个最优的分配方案，使得网站对每种 DVD 的购买量最小（即资源的利用率最大）和会员的满意度最高. 由此建议网站在会员提交订单时提示该种 DVD 是否租赁完，并给出选择等待下一周期或其他种类的 DVD.

假设每张 DVD 的工作是相互独立的且平均利用率相等，设为γ，于是第j种 DVD 的平均

利用率为 $c_j\gamma$. 令此系统的服务强度为 $\rho=\frac{\lambda}{c_j\gamma}$，只有 $\frac{\lambda}{c_j\gamma}<1$ 时才不会排成无限的队列. p_n 表示状态为 n 的概率.

由以上的分析，我们运用状态间的转移（见图 2），如状态 1 转移到状态 0，即系统中有 1 名会员服务完的转移率为 γp_1，状态 2 转移到状态 1 时，就是在两个服务台上被服务的会员中有一个被服务完. 因为不限哪一个，那么这时状态的转移率便是 $2\gamma p_2$. 同理，再考虑状态 n_j 转移到 n_j-1 的情况. 由于等待租赁第 j 种 DVD 的会员 n_j 一定不小于拥有量 c_j，因为第 j 种 DVD 只有 c_j 张，最多有 c_j 个会员在被服务，n_j-c_j 个会员在等候，因此这时状态转移率应为 $c_j\gamma p_{nj}$.

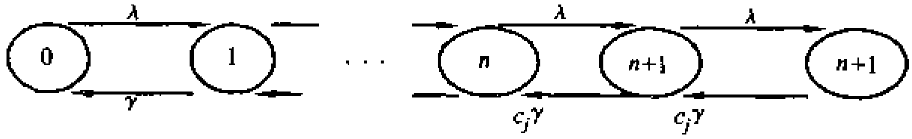


图 2

由图 2 可得：

$$\begin{cases}\gamma p_1=\lambda p_0\\ c_j\gamma p_{n_j+1}+\lambda p_{n_j-1}=(\lambda+c_j\gamma)p_{n_j}\end{cases}$$

这里 $\sum_{i=0}^{\infty}p_i=1$，且 $\rho\leqslant1$.

6 模型的推广

本文所建立的模型不仅通过问卷调查对需求进行了预测，而且还根据会员在线订单上所显示的偏爱程度确定出了最佳购买量和最佳分配方案. 我们建立模型的思想和方法可以推广到其他类似的问题. 又如各种车票、轮船票或飞机票的在线预订张数，机器因故障停机待修而需修理工人数的问题，图书馆图书租借和藏书问题等都可以用此模型进行分析.

参 考 文 献

[1] 钱颂迪. 运筹学（修订版）. 北京：清华大学出版社，2003
[2] 雷功炎. 数学模型讲义. 北京：北京大学出版社，2000
[3] 王沫然. Matlab6.0 与科学计算. 北京：电子工业出版社，2000
[4] 姜启源. 数学模型（第三版）. 北京：高等教育出版社，2003

长江水质综合评价污水处理模型

熊万胜 邱全富 王文军

【摘 要】该问题研究的是长江水质的评价和预测问题．运用科学的方法对各监测点水质指标的检测数据，以及“1995—2004年长江流域水质报告”给出的主要统计数据做出分析．根据长江流域的水质现状，为以后污染问题的控制提供有效的依据．

问题1：采用模糊数学原理所建立的模糊综合评价方法，找出影响水质的各主要因素；通过计算各因素的权重和隶属度，运用Matlab计算综合隶属度以及权重并建立模型，得到了综合评价集；对每个监测点的水质进行综合评价，得出了各地的水质污染程度，由高到低为：江西南昌滁槎、四川乐山岷江大桥、湖南长沙新港、四川泸州沱江二桥……

问题2：根据附录3中近10年长江干流主要观测站点的基本数据，对段面的污染总量做比较发现：高锰酸盐指数（CODMn）污染主要集中在湖北宜昌南津关．氨氮（NH_3-N）污染主要集中在四川攀枝花．

问题3：用数理统计的方法对附录四中的数据运用二次函数进行拟合，求出未来10年全流域在未来10年中，枯水期、丰水期、水文年在第几类水质占的比重，并用MATLAB做出未来10年各指标的权重随时间的变化图，再根据图形对未来10年长江的水质污染趋势进行预测分析．

问题4：用稳态一维污染物的降解模型，做出控制污染量的模型．得出了2005—2014年间每年间的处理量：

46.5亿吨 52亿吨 58亿吨 64.5亿吨 71.4亿吨 78.3亿吨
85.4亿吨 93.4亿吨 102.2亿吨 110.9亿吨

【关键词】模糊综合 拟合 模型

1 问题重述

水是人类赖以生存的资源，保护水资源就是保护我们自已．对于我国大江大河水资源的保护和治理应是重中之重．长江是我国第一、世界第三大河流，长江水质的污染程度日趋严重，已引起了相关部门和专家们的高度重视．因此，需要对长江水质进行评价和预测．

通常认为一个观测站（地区）的水质污染主要来自于本地区的排污和上游的污水．一般来说，江河自身对污染物都有一定的自然净化能力，即污染物在水环境中通过物理降解、化学降解和生物降解等使水中污染物的浓度降低，江河自然净化能力的指标称为降解系数．事

实上，长江干流的自然净化能力可以认为是近似均匀的，根据有关的检测数据，以及国标（GB3838—2002）给出的《地表水环境质量标准》来解决以下问题：

（1）对长江近2年多的水质情况做出定量的综合评价，并分析各地区水质的污染状况？

（2）研究、分析长江干流近一年主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区？

（3）假如不采取更有效的治理措施，依照过去10年的主要统计数据，对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析，比如研究未来10年的情况？

（4）根据你的预测分析，如果未来10年内每年都要求长江干流的Ⅳ类和Ⅴ类水的比例控制在20%以内，且没有劣Ⅴ类水，那么每年需要处理多少污水？

（5）对解决长江水质污染问题有什么切实可行的建议和意见？

2 符号说明

符号说明：

X_i——第 i 个因素的实测值；

S_{ij}——第 i 因素的第 j 级标准值；

R_{ij}——第 i 项监测指标相对于第 j 级别的隶属度；

I_i——一个无量纲数；

C_i——第 i 个评价指标的观测值；

S_i——第 i 个评价指标各级别水质标准限值的均值；

L_j——站点间距离；

N_{ij}——水流量；

V_{ij}——水流速；

P'_{ij}——高锰酸盐指数浓度；

M'_{ij}——截面的污染总量.

3 条件假设

条件假设：

（1）江污染有保守污染物（比如重金属）和非保守性污染物（高锰酸盐，氨氮等），此模型只考虑非保守性污染对长江水质的影响.

（2）只考虑人为因素对长江的影响，不考虑非人为因素和突发因素.

（3）长江自身对污染物都有一定的自然净化能力且自然净化能力可以认为是近似均匀的.

（4）污染物在长江中的运动符合运动流体规律，但在断面上污染物浓度近似相等.

（5）长江干流对Ⅳ类和Ⅴ类水的比例控制是控制的水流量.

（6）整个长江流域干流的截面近似看做相等.

4 模型建立及求解

4.1 模型 1

近年来，基于模糊数学原理所建立的模糊综合评价方法在水质评价中得到了广泛应用. 模糊综合评价就是根据给出的评价标准和实测值，经过模糊变换，对评价对象给出的总的评价的一种方法. 在水质评价中，首先要找出影响水质的各主要因素，确定评价因子集、评价集、隶属函数；然后通过计算各因素的权重和隶属度，得到综合隶属度，确定水质级别. 该方法可以体现水质污染程度是由轻到重逐渐变化的模糊特性，评价结果比较合理、更加接近客观实际. 由此，本问题采用模糊综合评价方法.

4.1.1 因子集和评价集的建立

在水质监测的若干监测指标中根据一定原则，选择 4 个指标作为评价因子，建立因子集. 由在长江沿线 17 个观测站监测的数据，选定了溶解氧（DO）、高锰酸盐指数（CODMn）、氨氮（NH_3-N）、pH 值（无量纲）等代表性较强的评价因子. 在此问题中根据长江沿线 17 个观测站监测的数据，由于 pH 值（无量纲）几乎都在符合要求的范围内，故它不是区分水质类别的主要因素. 又据水解原理，高锰酸盐指数越高，pH 值越低；氨氮浓度越大，pH 值越大. 从而，我们不考虑 pH 值，得到了因子集 U：{DO，CODMn，NH_3-N}.

根据国标（GB3838—2002）给出的《地表水环境质量标准》中 4 个主要项目标准限值，将水质级别分为 6 级. 由于每级都有较明确的数量关系，在实际计算中只需将前 5 级作评价，后一级自然确定. 因此确定评价集 $V=\{\mathrm{I},\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV},\mathrm{V}\}$. 其中 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ类为可饮用水.

4.1.2 单因素评价矩阵的确定

由于水质污染程度是一个模糊概念，水质分级标准也是模糊的，用隶属度来划分分级界限比较合理，所以单因素评价矩阵是由单因素的隶属度 r 为行元素组成的矩阵. 隶属度是通过对隶属函数的计算来确定的，隶属函数一般采用“降半梯形”的函数. 一般可以通过线性函数求出各级水隶属函数，根据各个因素的 5 级标准做出其各个级别的隶属函数：

第Ⅰ类水，即 $j=1$ 时，有

$$y_{ij}=\begin{cases}1, & 0\leqslant X_i\leqslant S_{ij}\\ (S_{ij}-X_i)/(S_{ij+1}-S_{ij}), & S_{ij}<X_i<S_{ij+1}\\ 0, & S_{ij+1}<X_i\end{cases} \tag{1}$$

第Ⅱ类水至Ⅳ类水，即 $j=2,3,4$ 时，有

$$y_{ij}=\begin{cases}1, & X_i=S_{ij}\\ (S_{ij}-X_i)/(S_{ij+1}-S_{ij}), & S_{ij-1}<X_i<S_{ij}\\ (X_i-S_{ij+1})/(S_{ij}-S_{ij+1}), & S_{ij}<X_i\leqslant S_{ij+1}\end{cases} \tag{2}$$

第Ⅴ类水，即 $j=5$ 时，有

$$y_{ij}=\begin{cases}1, & X_i \geqslant S_{ij} \\ (X_i-S_{ij-1})/(S_{ij}-S_{ij-1}), & S_{ij-1}<X_i<S_{ij} \\ 0, & S_i<S_{ij-1}\end{cases} \tag{3}$$

X_i 表示第 i 个因素的实测值，S_{ij-1}，S_{ij}，S_{ij+1} 分别为各个因素的第 $j-1$，j，$j+1$ 级标准值.

但由于 DO 值越大水值越好，所以其隶属度函数不同于上式，由下面公式求得：

第Ⅰ类水，即 $j=1$ 时，有

$$y_{ij}=\begin{cases}0, & X_{\text{DO}}=S_{j+1} \\ (X_{\text{DO}}-S_{j+1})/(S_j-S_{j+1}), & S_j<X_{\text{DO}}<S_{j+1} \\ 1, & X_{\text{DO}}\leqslant S_j\end{cases} \tag{4}$$

第Ⅱ类水至Ⅳ类水，即 $j=2,\cdots,4$ 时，有

$$y_{ij}=\begin{cases}(X_{\text{DO}}-S_{j+1})/(S_j-S_{j+1}), & X_{\text{DO}}=S_{j+1} \\ (S_{j-1}-X_{\text{DO}})/(S_{j-1}-S_j), & S_j<X_{\text{DO}}<S_{j-1} \\ 1, & X_{\text{DO}}\leqslant S_{j+1}, X_{\text{DO}}\geqslant S_{j-1}\end{cases} \tag{5}$$

第Ⅴ类水，即 $j=5$ 时，有

$$y_{ij}=\begin{cases}1, & X_{\text{DO}}\leqslant S_j \\ (S_{j-1}-X_{\text{DO}})/(S_{j-1}-S_j), & S_j<X_{\text{DO}}<S_{j-1} \\ 0, & X_{\text{DO}}\geqslant S_{j-1}\end{cases} \tag{6}$$

将各监测的监测数据代入前面确定的隶属函数中，就可以计算其隶属度，建立每个断面的单因子模糊评价矩阵 R_{ij}，R_{ij} 为第 i 项监测指标相对于第 j 级别的隶属度（程序见附录一）：

$$R_n=(r_{i1} \quad r_{i2} \quad r_{i3} \quad r_{i4} \quad r_{i5}) \quad (n=1,2,\cdots,17\text{；表示依次的监测面})$$

按上述方法可以得到 $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2161 & 0.2161 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0939 & 0.0939 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

…

$$\boldsymbol{R}_{17}=\begin{pmatrix}1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5107 & 0.5107 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3918 & 0.3918 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

其他 $\boldsymbol{R}_2\sim\boldsymbol{R}_{16}$ 矩阵可以用同样方法得到.

4.1.3 权重确定

权重是衡量因子集中某一因子对水质污染程度相对大小的量，权重系数越大，表明该因子对水质的影响程度越大. 这里权重是通过计算超标比来取得的，各因素的监测值相对于水

质标准的超标倍数越大，对污染的贡献越大，从而权重越大．对于一般的成本性指标，如 CODMn，NH_3-N 等，它的计算式一般定义为

$$I_i=\frac{C_i}{S_i}$$

其中，I_i是一个无量纲数，表示某评价指标的实际监测值相对于水质标准超标的倍数，C_i是第 i 个评价指标的观测值，S_i是第 i 个评价指标各级别水质标准限值的均值．但对于收益性指标，如 DO，则计算式应为

$$I_i=\frac{S_i}{C_i}$$

各项含义同上式．当每个评价指标的超标比都计算完之后，通过归一化，便能算出每个评价指标的权重：

$$W_i=\frac{I_i}{\sum I_i}$$

由此得到权重集 $W=(w_1 \quad w_2 \quad w_3)$ 并用于模糊综合评价．根据各因子超标比可以确定各监测点各指标的权重，如表 1 所示．表 1 为因素权重的归一化结果．

表 1

项　目		DO	CODMn	NH_3-N	$\sum$
四川攀枝花	i_1	0.513 4	0.328 66	0.177 53	1.019 6
	w_1	0.503 54	0.322 35	0.174 12	
重庆朱沱	i_2	0.526 3	0.283 3	0.322 13	1.131 7
	w_2	0.465 04	0.250 32	0.284 64	
湖北宜昌南津关	i_3	0.552 6	0.388 51	0.256 59	1.197 7
	w_3	0.461 38	0.324 38	0.214 24	
湖南城陵矶	i_4	0.541 3	0.511 58	0.320 39	1.373 3
	w_4	0.394 17	0.372 53	0.233 3	
江西九江河西水厂	i_5	0.606 2	0.328 19	0.155 69	1.090 1
	w_5	0.556 11	0.301 07	0.142 82	
安徽安庆皖河口	i_6	0.630 4	0.347 97	0.222 26	1.200 6
	w_6	0.525 06	0.289 82	0.185 12	
南京林山	i_7	0.627 4	0.282 82	0.124 14	1.034 4
	w_7	0.606 56	0.273 43	0.120 02	
四川乐山岷江大桥	i_8	0.845 5	0.708 5	0.897 37	2.451 4
	w_8	0.344 91	0.289 02	0.366 07	
四川凉姜沟	i_9	0.523 6	0.369 69	0.417 83	1.311 1
	w_9	0.399 35	0.281 97	0.318 68	
四川泸州沱江二桥	i_{10}	0.684 6	0.451 26	0.788 15	1.924
	w_{10}	0.355 82	0.234 54	0.409 64	

续表 1

项　　目		DO	CODMn	NH_3-N	$\sum$
湖北丹江口胡家岭	i_{11}	0.505 9	0.264	0.089 459	0.859 36
	w_{11}	0.588 69	0.307 21	0.104 1	
湖南长沙新港	i_{12}	0.661	0.335 91	0.889 74	1.886 6
	w_{12}	0.350 36	0.178 05	0.471 6	
湖南岳阳岳阳楼	i_{13}	0.565 2	0.566 61	0.374 48	1.506 3
	w_{13}	0.375 23	0.376 16	0.248 61	
湖北武汉宗关	i_{14}	0.633 3	0.449 32	0.191 75	1.274 4
	w_{14}	0.496 95	0.352 58	0.150 47	
江西南昌滁槎	i_{15}	0.824 8	0.314 04	4.498 3	5.637 1
	w_{15}	0.146 32	0.055 709	0.797 98	
江西九江蛤蟆石	i_{16}	0.594 2	0.505 8	0.278 09	1.378 1
	w_{16}	0.431 18	0.367 03	0.201 79	
江苏扬州三江营	i_{17}	0.577 5	0.408 3	0.278 78	1.264 6
	w_{17}	0.456 67	0.322 87	0.220 45	

4.1.4 模糊综合评价

在确定了单因素模糊评价矩阵 R 和权重集 W 之后，模糊综合评价集 B 由公式确定：

$$B = W \times R = (w_1,\ \cdots,\ w_3)\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{15} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{31} & \cdots & r_{35} \end{pmatrix} = (b_1,\ \cdots,\ b_5)$$

确定了综合评价集之后就可以根据最大隶属度原则，即若 $B_j = \max(b_1,\ \cdots,\ b_5)$，则该待评价对象为第 j 级. 将各因素权重向量与模糊矩阵合成，得到各监测断面的模糊综合评价结果如表 2 所示.

表 2

CC	Ⅰ类	Ⅱ类	Ⅲ类	Ⅳ类	Ⅴ类	所属级别
四川攀枝花	0.086 01	0.589 55	0	0	0	Ⅱ类
重庆朱沱	0.159 91	0.624 95	0	0	0	Ⅱ类
湖北宜昌南津关	0.211 87	0.673 25	0	0	0	Ⅱ类
湖南岳阳城陵矶	0.452 58	0.846 75	0	0	0	Ⅱ类
江西九江河西水厂	0.068 747	0.624 86	0	0	0	Ⅱ类
安徽安庆皖河口	0.140 66	0.634 53	0	0	0	Ⅱ类
江苏南京林山	0.016 293	0.735 72	0	0	0	Ⅱ类
四川乐山岷江大桥	0.357 51	0	0.642 49	0	0	Ⅲ类
四川宜宾凉姜沟	0.359	0.758 35	0	0	0	Ⅱ类
四川泸州沱江二桥	0.255 45	0.319 5	0.504 587	0	0	Ⅲ类

续表 2

CC	Ⅰ类	Ⅱ类	Ⅲ类	Ⅳ类	Ⅴ类	所属级别
湖北丹江口胡家岭	0	1	0	0	0	Ⅱ类
湖南长沙新港	0.213 15	0.302 51	0.392 8	0	0	Ⅲ类
湖南岳阳岳阳楼	0.507 34	0.542 67	0.036 262	0	0	Ⅱ类
湖北武汉宗关	0.280 04	0.724 91	0	0	0	Ⅱ类
江西南昌滁槎	0.111 19	0.009 025	0.044 159	0	0.797 98	Ⅴ类
江西九江蛤蟆石	0.398 52	0.829 7	0	0	0	Ⅱ类
江苏扬州三江营	0.251 26	0.707 93	0	0	0	Ⅱ类

对各监测断面进行模糊综合评价的结果表明，监测断面的水质级别最高已经达到第Ⅴ类，最低为第Ⅱ类水质，大部分地区水质较好.

污染程度由高到低为：江西南昌滁槎、四川乐山岷江大桥、湖南长沙新港、四川泸州沱江二桥、湖北丹江口胡家岭、湖南岳阳城陵矶、江西九江蛤蟆石、四川宜宾凉姜沟、江苏南京林山、湖北武汉宗关、江苏扬州三江营、湖北宜昌南津关、安徽安庆皖河口、重庆朱沱、江西九江河西水厂、四川攀枝花、湖南岳阳岳阳楼.

4.2 模型 2

要研究、分析长江干流近一年主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区，既是要研究、分析长江干流近一年主要污染物高锰酸盐指数和氨氮在哪些地区的总浓度贡献最高，由于考虑的是总浓度贡献，长江干流的自然净化能力可以认为是近似均匀的，且长江干流的截面近似相等；在研究的时候就以长江在每个断面上截面的主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染总量进行比较，在该地区的高锰酸盐指数和氨氮的量越大，则说明该地区的污染越严重. 根据附录 3 中近 10 年长江干流主要观测站点的基本数据，站点间距离为 L_j，流量为 N_{ij}，流速为 V_{ij}，高锰酸盐指数浓度 P'_{ij}，截面的污染总量 M'_{ij}，氨氮浓度 P''_{ij}，截面的污染总量 M''_{ij}（i 表示在 2000 年 4 月到 2004 年 5 月之间的月份，j 依次表示长江的干流断面）. 由此根据下面的关系式：

$$M'_{ij}=\left(\frac{N_{ij}}{V_{ij}}\times L_j\right)\times P'_{ij},\qquad M''_{ij}=\left(\frac{N_{ij}}{V_{ij}}\times L_j\right)\times P''_{ij}$$

代入数据计算得到（见表 3）.

表 3

监测断面	四川	重庆	湖北宜昌	湖南岳阳	江西九江	安徽安庆	江苏
	攀枝花	朱沱	南津关	城陵矶	河西水厂	皖河口	南京林山
CODMn 的污染总量	29 402.06	187 318	602 661	825 491	639 884	653 023	533 899
NH_3-N 的污染总量	9 575.69	72 624.3	215 140	226 966	266 878	284 427	282 380

由表 3 可知：高锰酸盐指数（CODMn）污染主要集中在湖北宜昌南津关、安徽安庆皖河口、江西九江河西水厂等地；氨氮（NH_3-N））污染主要集中在四川攀枝花、重庆朱沱等地．

4.3　模型 3

在没有任何有效治理措施的情况下，需要对长江未来水质污染的发展趋势做出预测性分析．根据长江近 10 年水质污染的主要统计数据，分别对第几类水在枯水期、丰水期、水文年的全流域、干流、支流在近 10 年中所占的比重组成的向量进行拟合，得出的解为 a，b，c；用二次函数 $y = at^2 + bt + c$ 进行求解，得到第几类水在枯水期、丰水期、水文年的全流域，干流以及支流在未来 10 年中所占的权重（见附录二）．对第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ类而言，其值越大水质越好；对Ⅳ、Ⅴ类而言，其值越大水质越差．由于是对整个长江流域的水质污染的发展趋势做出预测性分析，所以在本问题中只考虑全流域在未来 10 年中在枯水期、丰水期、水文年在第几类水质所占的比重．如表 4 所示．

表 4

未来 10 年的比重											
t = 2005	t = 2006	t = 2007	t = 2008	t = 2009	t = 2010	t = 2011	t = 2012	t = 2013	t = 2014		
15.128 2	13.020 9	11.009 8	9.094 9	7.276 2	5.553 7	3.927 4	2.397 3	0.963 4	0.374 3	枯水期	Ⅰ
19.567 3	15.706 8	12.358 5	9.522 4	7.198 5	5.386 8	4.087 3	3.3	3.024 9	3.262	丰水期	
22.843 6	17.989	13.816 2	10.325 2	7.516	5.388 6	3.943	3.179 2	3.097 2	3.697	水文年	
37.036 3	34.418	32.345 1	30.817 6	29.835 5	29.398 8	29.507 5	30.161 6	31.361 1	33.106	枯水期	Ⅱ
25.19	27.167	28.716	29.837	30.53	30.795	30.632	30.041	29.022	27.575	丰水期	
30.059 1	30.518 5	31.049 9	31.653 3	32.328 7	33.076 1	33.895 5	34.786 9	35.750 3	36.785 7	水文年	
36.181 8	36.725 4	37.150 8	37.458	37.647	37.717 8	37.670 4	37.504 8	37.221	36.819	枯水期	Ⅲ
44.220 8	44.744 3	44.898 8	44.684 3	44.100 8	43.148 3	41.826 8	40.136 3	38.076 8	35.648 3	丰水期	
37.865 4	39.173 9	39.968 8	40.250 1	40.017 8	39.271 9	38.012 4	36.239 3	33.952 6	31.152 3	水文年	
7.162 7	9.982 1	12.226 5	13.895 9	14.990 3	15.509 7	15.454 1	14.823 5	13.617 9	11.837 3	枯水期	Ⅳ
5.840 9	7.273 6	8.663 1	10.009 4	11.312 5	12.572 4	13.789 1	14.962 6	16.092 9	17.18	丰水期	
6.112 7	8.135	9.776 9	11.038 4	11.919 5	12.420 2	12.540 5	12.280 4	11.639 9	10.619	水文年	
2.004 5	2.861 9	3.563 9	4.110 5	4.501 7	4.737 5	4.817 9	4.742 9	4.512 5	4.126 7	枯水期	Ⅴ
2.333 7	2.353 2	2.523 5	2.844 6	3.316 5	3.939 2	4.712 7	5.637	6.712 1	7.938	丰水期	
2.174 6	2.604 9	3.027 6	3.442 7	3.850 2	4.250 1	4.642 4	5.027 1	5.404 2	5.773 7	水文年	
2.435 5	2.951 4	3.672 7	4.599 4	5.731 5	7.069	8.611 9	10.360 2	12.313 9	14.473	枯水期	Ⅵ
2.85	2.830 1	2.968 6	3.265 5	3.720 8	4.334 5	5.106 6	6.037 1	7.126	8.373 3	丰水期	
0.92	1.586 1	2.391 6	3.336 5	4.420 8	5.644 5	7.007 6	8.510 1	10.152	11.933 3	水文年	

根据表 4 中的数据做出了第几类水在枯水期、丰水期、水文年的未来 10 年随时间的变化趋势（见图 1，图 2，图 3，图 4，图 5，图 6）：

图 1 表示第Ⅰ类水在未来 10 年的变化情况：枯水期、丰水期、水文年比重都呈逐渐减小的趋势，水质逐渐变差．图 2 表示第Ⅱ类水在未来 10 年的变化情况：枯水期比重先减小后增

大，水质先变差后变好；丰水期比重先增大后减小、水质先变好后变差；水文年比重呈逐渐增大的趋势，水质逐渐变好.

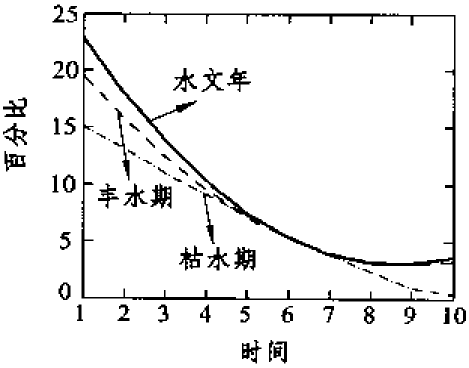


图 1　第一类水未来 10 年的变化趋势

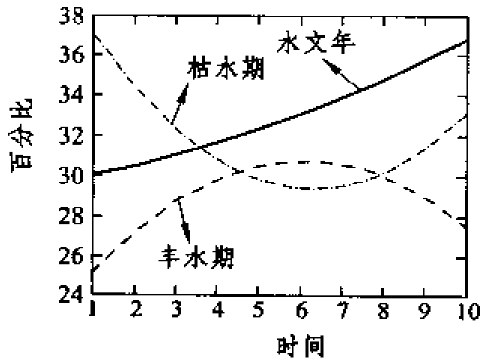


图 2　第二类水未来 10 年的变化趋势

图 3 表示第Ⅲ类水在未来 10 年的变化情况：枯水期比重变化不大，水质趋于稳定状态；丰水期比重先增大后减小、水质先变好后变差；水文年比重值先增大后减小，水质先变好后变差．图 4 表示第Ⅳ类水在未来 10 年的变化情况：枯水期比重逐渐增大，水质逐渐变差；丰水期比重呈线性增大、水质逐渐变差；水文年比重值先增大后减小，水质先变差后变好.

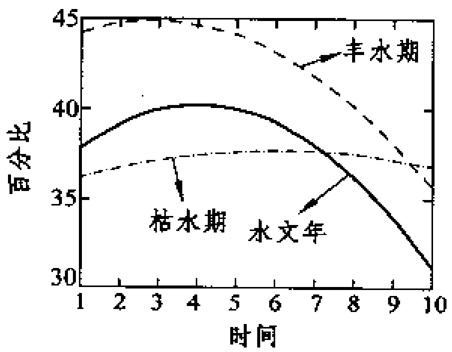


图 3　第三类水未来 10 年的变化趋势

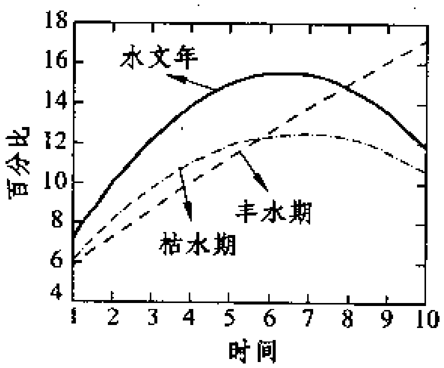


图 4　第四类水未来 10 年的变化趋势

图 5 表示第Ⅴ类水在未来 10 年的变化情况：枯水期比重值先增大后减小，水质先变差后变好；丰水期比重逐渐增大、水质逐渐变差；水文年比重逐渐增大，水质变差．图 6 表示第劣Ⅴ类水在未来 10 年的变化情况：枯水期、丰水期、水文年比重都呈逐渐增大的趋势，水质逐渐变差.

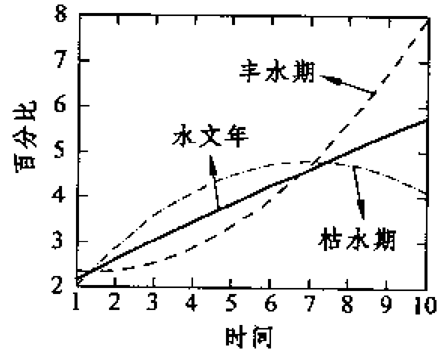


图 5　第五类水未来 10 年的变化趋势

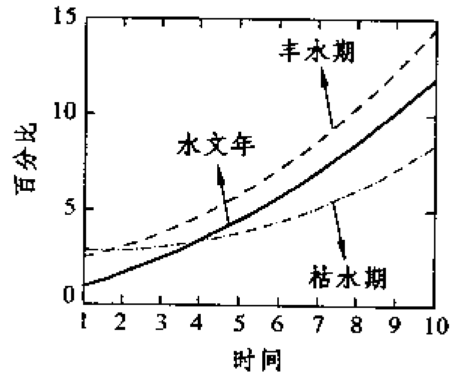


图 6　第六类水未来 10 年的变化趋势

由题目附录 4 的数据和我们所预测的长江未来水质污染的发展趋势是一致的．同时也可以

看到未来10年中第Ⅴ类水的比重呈逐渐增大的趋势，长江流域的水质污染环境恶化不断加剧.

4.4　模型 4

在未来10年中，为了让长江的水质得到控制，且要求长江干流的Ⅳ类和Ⅴ类水的比例控制在20%以内，就要对劣Ⅴ类及Ⅳ类和Ⅴ类超过20%的污水进行处理.

第一步：

根据近10年的水流量和废物排放量进行拟合求出二次函数的系数，利用

$$y = 47.51T^2 + 510.31T + 8916.5$$

分别求出未来10年每年的水流量（见表5）.

表 5

年份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
水流量	8 780	8 200	7 520	6 750	5 880	4 920	3 860	2 710	1 460	118.7

利用

$$z = 0.8352T^2 + 3.6761T + 167.3750$$

分别求出未来10年每年的污染物的排放量（见表6）.

表 6

年份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
废物排放量	308.871	331.757	356.313	382.539	410.436	440.003	471.241	504.149	538.728	574.977

第二步：

根据延河的河流特征运用稳态一维污染物的降解模型对河流水质进行数学模拟计算，其数学表达式为

$$C_i = C_0 \times \exp(-K \times t)$$

式中，C_0 为起始断面该污染物浓度（mg/L）；C_i 为流经 t 日后河水中残存的该污染物的浓度（mgL）；K 为河流综合自净系数（1 d）；

在此过程中，需要处理的污水量可用下面的表达式进行计算：

$$A_i = B_i x + B_i[(y+z) - 0.2] + \frac{f_i}{B_i} C_i'$$

式中，i 为从2004年后第 i 年，A_i 为第 i 年要处理的污水量，B_i 为第 i 年的水流量，f_i 为为第 i 年的排污量，C_i' 为流经 t 日后河水中残存的该污染物的浓度（mgL），x，y，z 分别是劣Ⅴ类及Ⅳ类和Ⅴ类所占的比重.

根据所拟合的数据，代入上式得到了以下结果（见表7）.

表 7

年份	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
处理的污水量（亿吨）	46.5	52	58	64.5	71.4	78.3	85.4	93.4	102.2	110.9

4.5 问题 5

保护长江

20 世纪 80 年代以来，随着经济的发展，人为污染水源、恶化水质的现象越来越严重．水是人类赖以生存的资源，保护水资源就是保护我们自己．对于我国大江大河水资源的保护和治理应是重中之重，根据模型，我们提出以下的建议和意见：

首先，我们要节水、控制污染源排放总量．

对城镇的生活污水，利用管网将城镇生活污水集中排放．对城镇的排水管网进行改造，修建 1 条或几条主排污渠，用来收集来自多个小排污渠的废污水．通过主排污渠将废污水送到废水进行集中处理，再将处理达标后的废污水排于河中．

关闭严重污染的企业．达标排放是控制工业污染源的基本方法，当地进行重新制定，水利部门和环保部门应根据制定的水功能区划制定污染物总量控制计划，计算出各功能的环境容量，根据环境容量，制定相关企业的限排方案，严格控制排入各功能区的污染物总量．当地政府要做好排污企业与相关企业的协调工作，避免排污企业集中大量向江河排放污染物．

只有这样才能使长江流域的水质不会出现在第 3 问题中所预测的严重污染的情况．

其次，人人要转变观念，提高环保意识；充分发挥水环境监测机构的作用；完善现行水环境保护法律法规；先进技术处理工业废水，采用一种效率高、费用适中的先进工艺来处理废水．

5 模型评价与改进

5.1 模型的优点

（1）用 Matlab 和 Excel 两个工具准确地对众多数据进行处理，在运用 Matlab 进行数据拟合时，得到了较理想化的曲线．用 Matlab 准确作出了图像，对问题 3 的结果分析一目了然．

（2）四个问题分别求解，适用性强．

（3）从问题出发，分析了污染的各种因素，建立了一般的数学模型，用大量的数据进行了验证，从而为我们处理长江流域的污染问题提供了有效的依据．

（4）当今社会要协调、健康、持续发展，我们的模型对集中处理城镇污水和工业废水具有借鉴作用．

5.2 模型的缺点

（1）本文模型参数是用二次函数进行拟合求解得出，处理过程中可能会存在一点偏差．

（2）为了使计算简便，使所得的结果更理想化，忽略了一些次要因素．

5.3 模型的改进

在建立模型的过程中，可以在模型中考虑河段的宽度，深度；保守性污染物在近似均匀流体中的含量；酸碱性和反应对该流域的 pH 值的影响，但考虑起来较复杂，留着时间充裕时考虑．

6 模型推广

建立模型的方法和思想可以推广到我们国家的其他几条重要的河流（如黄河、淮河以及珠江地区），以及其他类似的问题，比如空气、水库污染问题．本文所建立的模型不仅估算出长江上主要污染物的分布情况，而且也看到如果在未来我们不采取有力措施，长江生态将在10 年内受到严重破坏．同时该模型对定量分析水质，即用灰色理论思想积极指导我们在以后建立其他更复杂的自然模型具有重要的意义．

参考文献

[1] 国家环保局《水和废水监测分析方法》编委会．水和废水监测分析方法（第三版）．北京：中国环境科学出版社，1989

[2] 中国医学科学院卫生研究所．水质分析法（第四版）．北京：人民卫生出版社，1983

关于长江水质综合评价污水处理模型

吕丝俊　陈学军　卢开诚

【摘　要】本文针对长江水质的现状，通过单因子评价模型，对整个长江及其干流近两年多的水质情况做出了定量的综合评价．在2003年11月到2004年2月期间，整个长江的水质特别差，并分析了各地区水质的污染状况，有几个地区的水质污染比较严重，其中江西南昌滁槎主要污染指标为氨氮；四川乐山的主要污染指标为溶解氧、氨氮；湖南长沙的主要污染指标为氨氮；湖南岳阳的主要污染指标为高锰酸盐指数．其次利用统计方法、C语言自编程序，分析得到了整个长江的主要污染源——高锰酸盐主要集中在湖南岳阳城陵矶、四川攀枝花龙洞，氨氮的污染源主要集中在重庆朱沱．然后用多项式拟合模型、利用Matlab6.5.1软件，预测了未来10年的水质情况，且通过对未来10年长江总流量和废水排放总量的预测，用C语言自编程序，得到了未来10年需要处理的污水量，分别为

197亿吨，226亿吨．241亿吨，259亿吨，278亿吨

298亿吨，320亿吨，344亿吨，369亿吨，395亿吨

根据研究结果，提出了一些解决长江水质污染问题的合理化建议．根据我们的预测模型，可推广到如何控制江水主要污染物的排放，使江水水质达到比较理想的值．

【关键词】水质等级　综合评价　污水处理

1　问题重述

水是人类赖以生存的资源，保护水资源就是保护我们自己，近些年来长江的水质污染越来越严重．2004年10月，由全国政协与中国发展研究院联合组成的考察团，从长江上游宜宾到下游上海，对沿线21个重点城市做了实地考察，得到了一些基本数据（见附表）．通过这些数据，对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价，并分析各地区水质的污染状况以及研究、分析长江干流近一年主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区？在不采取有效治理措施情况下，依照过去10年的主要统计数据，对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析，比如研究未来10年的情况，并根据预测分析，如果未来10年内每年都要求长江干流的Ⅳ类和Ⅴ类水的比例控制在20%以内，且没有劣Ⅴ类水，那么每年需要处理多少污水？

针对以上情况提出解决长江水质污染问题的切实可行的建议和意见．

2 基本假设

基本假设：

（1）假设长江的降解系数为 0.2 且固定不变（单位：1/天）.

（2）假设上游的污水经过自然净化降解而没有流到下游.

（3）假设未来 10 年每年的污水排放集中在每年的第一天进行.

（4）假设长江水的总流量为干流上的总流量，污水总流量即为干流的总排放量.

（5）假设长江干流的自然净化能力是近似均匀的.

（6）假设未来 10 年长江沿岸各个观测站平均每个月取 1 次样本.

3 符号说明

符号说明：

$p(i, k)$ —— 第 i 个月第 k 个检测项目指数的平均值；

$c(i, j, k)$ —— 第 i 月第 j 观测站点第 k 项检测项目的指数；

$q(j, k)$ —— 第 j 个观测站点第 k 项检测项目的指数的平均值；

$s(i, j)$ —— 第 i 月第 j 观测站点水流量；

k —— 降解时主要污染物的系数解；

M_i —— 未来 10 年每年的污水处理总量；

A_i —— 未来 10 年每年的废水排放总量；

B_i —— 未来 10 年每年的长江总量；

p_k —— 第 k 种主要污染物按月平均值；

c_{0i} —— 未来 10 年每年水质类别在Ⅳ类及其以上的水总流量.

4 问题分析与模型的建立

4.1 问题 1 的模型建立与求解

对长江近两年的水质做出定量的综合评价，并分析各地区的污染情况. 通过利用单因子方法建立均值和加权均值模型，分别对最近两年每个月份的主要监测项目做出分析.

4.1.1 模型 1：均值模型

采用均值求法对每个月长江上的 17 个观测站点的检测项目 $c(i, j, k)$（$c(i, j, k)$ 表示第 i 月第 j 观测站点第 k 项检测项目的指数）分别求和，再求其算术平均值 $p(i, k)$ 作为整个长江第 i 月第 k 项检测项目的指数水质的综合评价

$$p(i,k)=\frac{1}{17}\sum_{j=1}^{17}c(i,j,k) \tag{1}$$

根据《地表水环境质量标准》(GB3838—2002)中4个主要项目标准限值对长江干流的水质进行统计分类，因为Ⅰ类、Ⅱ类、Ⅲ类水的水质比较好，为可饮用水，而Ⅳ类、Ⅴ类、劣Ⅴ类是污染严重的水源，为不可饮用水，所以，我们判断Ⅳ类以上的水为污染水. 用表1来确定最近两年每个月的水质等级类别表示为

表1　近两年长江各站点每个月的水质等级类别综合评价

日　期	主要监测项目				
	pH*	DO	CODMn	NH_3-N	水质类别
2003-06	7.58	6.66	2.75	0.37	Ⅱ类
2003-07	7.68	6.64	3.51	0.32	Ⅱ类
2003-08	7.09	6.97	2.79	0.49	Ⅱ类
2003-09	8.03	7.43	2.53	0.53	Ⅲ类
2003-10	7.83	8.05	3.16	0.72	Ⅲ类
2003-11	7.93	8.43	3.05	1.19	Ⅴ类
2003-12	8.03	8.79	3.22	1.37	Ⅴ类
2004-01	7.81	8.23	3.22	1.42	Ⅴ类
2004-02	7.96	7.96	3.66	2.07	劣Ⅴ类
2004-03	7.72	8.01	3.21	0.94	Ⅲ类
2004-04	6.98	6.93	2.96	0.71	Ⅲ类
2004-05	7.19	7.41	3.06	0.43	Ⅱ类
2004-06	7.16	7.24	3.21	0.41	Ⅱ类
2004-07	7.1	7.21	3.23	0.34	Ⅱ类
2004-08	7.73	7.41	2.86	0.36	Ⅱ类
2004-09	7.79	7.29	2.93	0.22	Ⅱ类
2004-10	7.88	8.2	2.64	0.63	Ⅲ类
2004-11	7.92	8.37	3.32	0.53	Ⅲ类
2004-12	7.95	9.3	3.03	0.96	Ⅲ类
2005-01	7.9	9.91	2.88	0.77	Ⅲ类
2005-02	7.84	10.12	2.6	0.63	Ⅲ类
2005-03	7.78	9.46	2.66	0.41	Ⅱ类
2005-04	7.71	8.03	2.65	0.33	Ⅱ类
2005-05	8.3	7.03	2.66	0.25	Ⅱ类
2005-06	8.3	7.27	2.88	0.26	Ⅱ类
2005-07	7.77	6.84	2.97	0.26	Ⅱ类
2005-08	7.12	6.89	2.87	0.25	Ⅱ类
2005-09	7.67	7.39	2.89	0.26	Ⅱ类

通过表 1 可以看出，大部分时间长江的水质综合评价情况较好，但是 2003 年 11 月到 2004 年 2 月期间，尤其是 2004 年 2 月的水质特别差，其主要原因在于 2004 年 2 月江西南昌滁槎段排放的氨氮量非常高，达到了 24.2 mg/L.

4.1.2　模型 2：加权均值模型

根据不同月份长江干流的各个观测点的流量对各主要监测项目赋予权值，权值为该站点的水流量占干流水流总量的百分比，得到主要污染物的污染指数加权均值：

$$p(i,k)=\frac{\sum_{j=1}^{7}(s(i,j)*c(i,j,k))}{\sum_{j=1}^{7}s(i,j)},\quad (i=1,\cdots,13,\ j=1,\cdots,7,\ k=1,\cdots,4) \tag{2}$$

其中，$i=1$ 表示 2004 年 04 月，$i=2$ 表示 2004 年 05 月，……，$i=13$ 表示 2005 年 04 月.

求出每个月份各个监测项目的均值后，根据《地表水质量标准》确定最近一年多长江干流的每个月的水质类别（见表 2）.

表 2　近一年多长江干流的每个月的水质类别综合评价结果

日期	主要检测项目				
	pH*	DO	CODMn	NH_3-N	水质类别
2004-04	7.89	7.751 458	2.664 682	0.204 251	Ⅱ类
2004-05	7.19	8.046 032	3.092 043	0.220 606	Ⅱ类
2004-06	7.16	7.342 577	2.534 651	0.180 708	Ⅱ类
2004-07	7.64	7.134 097	2.574 795	0.186 504	Ⅱ类
2004-08	7.73	7.688 306	2.852 361	0.293 999	Ⅱ类
2004-09	7.79	7.516 884	3.099 435	0.180 488	Ⅱ类
2004-10	7.88	7.585 693	2.185 883	0.182 731	Ⅱ类
2004-11	7.92	7.969 405	2.226 694	0.176 797	Ⅱ类
2004-12	8.42	9.226 227	2.062 782	0.187 166	Ⅱ类
2005-01	8.34	9.881 494	2.469 251	0.251 853	Ⅱ类
2005-02	8.13	10.060 18	2.356 776	0.254 158	Ⅱ类
2005-03	7.78	9.760 149	2.286 448	0.245 436	Ⅱ类
2005-04	7.71	8.172 531	2.065 092	0.229 42	Ⅱ类

分析各地区水质的污染状况：

对长江近两年多的水质做出定量的综合评价，且分析各个地区水质的污染情况.建立均值模型为

$$p_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_{ij},\quad (k=1,\cdots,17;\ n=1,\cdots,15;\ j=1,\cdots,4) \tag{3}$$

其中，$i=1$ 时，表示 2004 年 7 月，……，$i=15$ 时，表示 2005 年 9 月，即对第 j 个观测站点

的第 k 个主要监测项目按月分别算其均值，从而可以根据《地表水环境质量标准》得知第 j 个观测站点的第 k 个主要监测项目指数的水质指标，进而得出了各个检测点的水质等级综合评价．从而对整个长江最近两年多的水质情况按站点做出定量的综合评价，并根据每个主要监测项目的水质指标，得出每个地区的主要污染状况和污染严重地区的主要污染物（见表 3）．

表 3　每个地区的主要污染状况和污染严重地区的主要污染物

序号	点位名称	主要监测项目（单位：mg/L）					
		pH*	DO	CODMn	NH_3-N	水质类别	主要污染指标
1	四川攀枝花	7.19	9.505 333	3.193 333	0.155 333	Ⅱ	
2	重庆朱沱	7.16	9.155 333	2.206 667	0.328	Ⅱ	
3	湖北宜昌南津关	7.1	8.08	2.513 333	0.224	Ⅱ	
4	湖南岳阳城陵矶	7.73	8.996 667	3.793 333	0.342	Ⅱ	
5	江西九江河西水厂	7.79	8.002	2.333 333	0.141 333	Ⅱ	
6	安徽安庆皖河口	7.88	7.488 667	2.373 333	0.194	Ⅱ	
7	江苏南京林山	7.92	7.448	2.2	0.1	Ⅱ	
8	四川乐山岷江大桥	7.95	5.936	3.9	0.638 667	Ⅲ	溶解氧，氨氮
9	四川宜宾凉姜沟	7.9	8.354 667	2.213 333	0.172 667	Ⅱ	
10	四川泸州沱江二桥	7.84	8.166 667	2.793 333	0.184	Ⅱ	
11	湖北丹江口胡家岭	7.78	9.502	1.92	0.130 667	Ⅰ	
12	湖南长沙新港	7.71	7.822 667	2.213 333	0.782	Ⅲ	氨氮
13	湖南岳阳岳阳楼	8.3	8.734	4.686 667	0.444 667	Ⅲ	高锰酸盐指数
14	湖北武汉宗关	8.3	7.311 333	3.446 667	0.151 333	Ⅱ	
15	江西南昌滁槎	7.77	5.818	2.413 333	2.908 667	劣Ⅴ类	氨氮
16	江西九江蛤蟆石	7.12	8.028	3.52	0.220 667	Ⅱ	
17	江苏扬州三江营	7.67	8.314	3.613 333	0.266 667	Ⅱ	

通过表 1，表 2，表 3 知道，大部分地区的水质类别为Ⅱ类，水质暂时为可食用水．但也可看出有些地方的水污染比较严重，有些地区的水已经不可食用，如江西南昌滁槎，它的主要污染指标为氨氮．有些地区的水已趋向于不可食用水，如四川乐山，它的主要污染指标为溶解氧、氨氮；湖南长沙的主要污染指标为氨氮；湖南岳阳的主要污染指标为高锰酸盐指数．

4.2　问题 2 的模型建立与求解

对问题 2 进行分析，根据地表水环境质量标准的标准限值，把长江干流的水分为 6 个等级的水质．通常认为一类水质最好，二类水质次之，而三类或以上的水质认为质量较差，所以可应用 C 语言编程对数据进行分类统计，只统计高锰酸钾指数（及氨氮指数）介于Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ和劣Ⅴ类水质等级限值的频次．对该频次进行分析，如果某一个站点（观测点）某项指标

出现的较高等级频次越多，则可以认为该站点附近的水域污染越严重，污染指标可视为该项指标．通过此方法，得到了2004年1月到2005年9月共21个月的长江干流7个观测站的高锰酸钾指数和氨氮指数介于对应水质等级限值的频次情况，如表4和表5所示．

表4　各观测站高锰酸钾指数介于对应水质的等级限值的频次

站点名	Ⅲ水频次	Ⅳ类水频次	Ⅴ类水频次	劣Ⅴ类水频次	频次合计
四川攀枝花	2	1			3
重庆朱沱	1				1
湖北宜昌南津关					
湖南岳阳城陵矶	8				8
江西九江河西水厂					
安徽安庆皖河口					
江苏南京林山					

表5　各观测站氨氮指数介于对应水质的等级限值的频次

站点名	Ⅲ水频次	Ⅳ类水频次	Ⅴ类水频次	劣Ⅴ类水频次	频次合计
四川攀枝花		1			1
重庆朱沱	7				7
湖北宜昌南津关	1				1
湖南岳阳城陵矶					
江西九江河西水厂					
安徽安庆皖河口					
江苏南京林山					

从表4和表5可以看出，高锰酸钾指数介于Ⅲ类水或以上的频次有8次出现在湖南岳阳城陵矶，有3次出现在四川攀枝花龙洞，氨氮指数介于Ⅲ类水或以上的频次有7次出现在重庆朱沱，而其余地区则较少．因此可以认为，近一年多来长江干流的主要污染物高锰酸盐指数的污染源主要集中在湖南岳阳城陵矶、四川攀枝花龙洞，氨氮的污染源主要集中在重庆朱沱．

4.3　问题3的模型建立与求解

依照过去10年的主要统计数据，利用多项式拟合曲线得到了水污染的发展趋势，并做出预测分析，在图形上，可以清楚地看到未来10年的总体污染情况．

模型原理：利用走势，对长江水质进行预测分析．前10年Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，劣Ⅴ类水所占百分比在枯水期、丰水期，水文年的走势曲线（见图1，图2，图3，图4，图5，图6）（k 曲线代表枯水期，f 曲线代表丰水期，s 曲线代表水文年）．

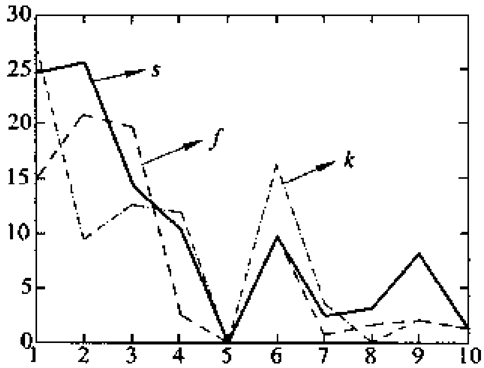


图 1（Ⅰ类水百分比走势）

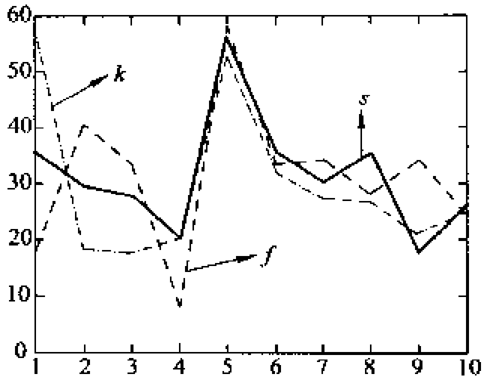


图 2（Ⅱ类水百分比走势）

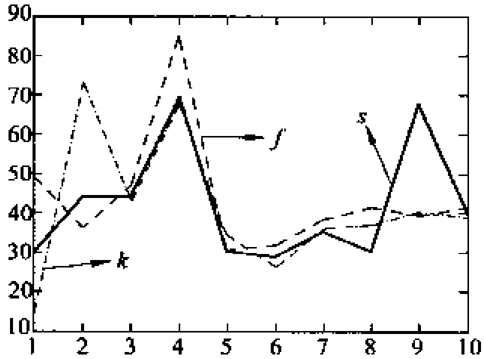


图 3（Ⅲ类水百分比走势）

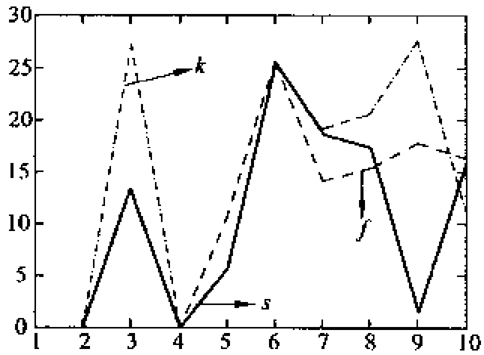


图 4（Ⅳ类水百分比走势）

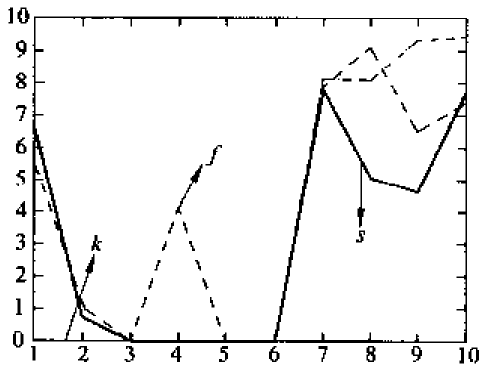


图 5（Ⅴ类水百分比走势）

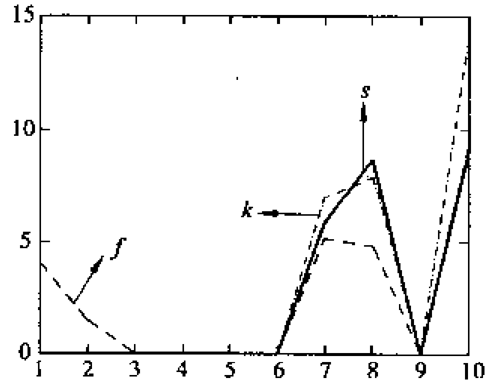


图 6（劣Ⅴ类水百分比走势）

通过过去 10 年的曲线图用多项式拟合方法，得到过去 10 年及未来 10 年Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，劣Ⅴ类水的百分比在枯水期、丰水期，水文年的走势拟合曲线（见图 7，图 8，图 9，图 10，图 11，图 12）.

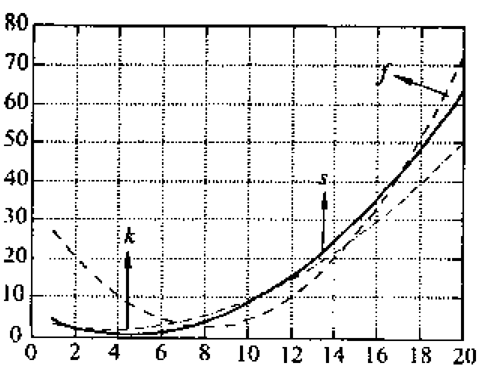


图 7 （Ⅰ类水百分比走势）

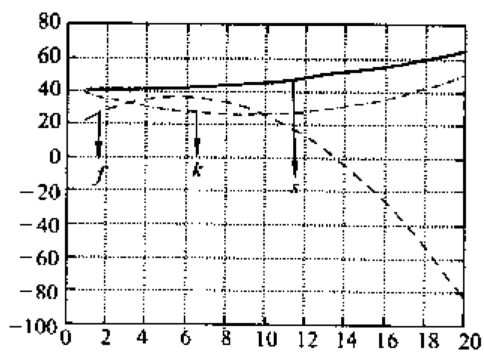


图 8 （Ⅱ类水百分比走势）

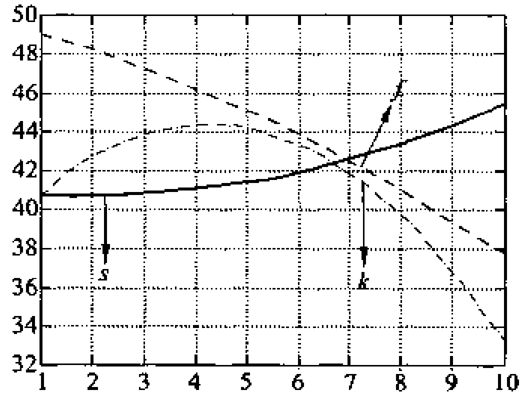


图 9 （Ⅲ类水百分比走势）

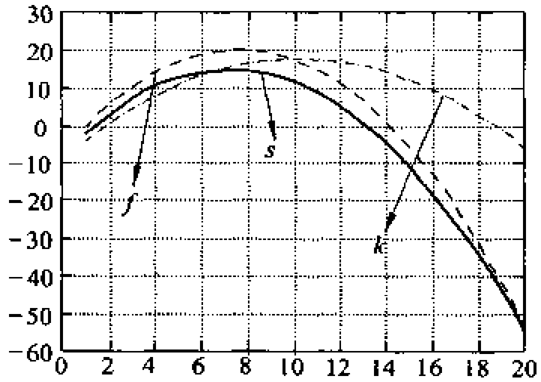


图 10 （Ⅳ类水百分比走势）

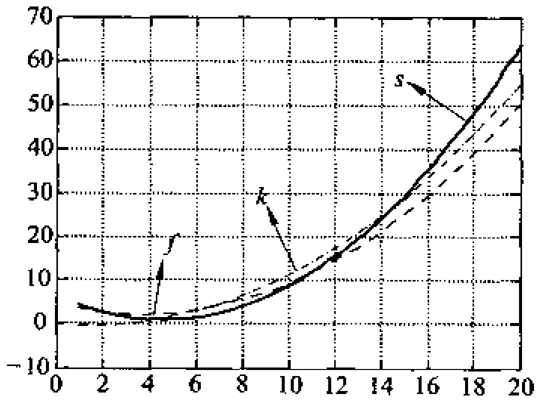


图 11 （Ⅴ类水百分比走势）

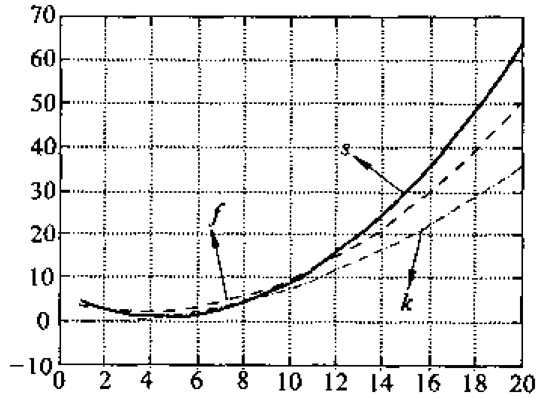


图 12 （劣Ⅴ类水百分比走势）

通过图形观察可以得出在未来 10 年里Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ类三类水的比例将逐渐降低，而Ⅳ，Ⅴ，劣Ⅴ类水比例将逐渐增高．未来 10 年中每年每类水的比例的一个预报值为（见表 6）：

这表明若不采取更有效的治理措施，长江生态将濒临崩溃．

表 6　未来 10 年中每年每类水的比例的一个预报值

百分比	预测时段	2005 年	2006 年	2007 年	2008 年	2009 年	2010 年	2011 年	2012 年	2013 年	2014 年
Ⅰ类水	枯水期	15.1282	13.0209	11.0098	9.0949	7.2762	5.5537	3.9274	2.3973	0.9634	0.3743
	丰水期	19.5673	15.7068	12.3585	9.5224	7.1985	5.3868	4.0873	3.3	3.0249	3.262
	水文年	22.8436	17.989	13.8162	10.3252	7.516	5.3886	3.943	3.1792	3.0972	3.697
Ⅱ类水	枯水期	37.0363	34.418	32.3451	30.8176	29.8355	29.3988	29.5075	30.1616	31.3611	33.106
	丰水期	25.19	27.167	28.716	29.837	30.53	30.795	30.632	30.041	29.022	27.575
	水文年	30.0591	30.5185	31.0499	31.6533	32.3287	33.0761	33.8955	34.7869	35.7503	36.7857
Ⅲ类水	枯水期	36.1818	36.7254	37.1508	37.458	37.647	37.7178	37.6704	37.5048	37.221	36.819
	丰水期	44.2208	44.7443	44.8988	44.6843	44.1008	43.1483	41.8268	40.1363	38.0768	35.6483
	水文年	37.8654	39.1739	39.9688	40.2501	40.0178	39.2719	38.0124	36.2393	33.9526	31.1523
Ⅳ类水	枯水期	7.1627	9.9821	12.2265	13.8959	14.9903	15.5097	15.4541	14.8235	13.6179	11.8373
	丰水期	5.8409	7.2736	8.6631	10.0094	11.3125	12.5724	13.7891	14.9626	16.0929	17.18
	水文年	6.1127	8.135	9.7769	11.0384	11.9195	12.4202	12.5405	12.2804	11.6399	10.619

续表 6

百分比	预测时段	2005 年	2006 年	2007 年	2008 年	2009 年	2010 年	2011 年	2012 年	2013 年	2014 年
V 类水	枯水期	2.0045	2.8619	3.5639	4.1105	4.5017	4.7375	4.8179	4.7429	4.5125	4.1267
	丰水期	2.3337	2.3532	2.5235	2.8446	3.3165	3.9392	4.7127	5.637	6.7121	7.938
	水文年	2.1746	2.6049	3.0276	3.4427	3.8502	4.2501	4.6424	5.0271	5.4042	5.7737
劣 V 类水	枯水期	2.4355	2.9514	3.6727	4.5994	5.7315	7.069	8.6119	10.3602	12.3139	14.473
	丰水期	2.85	2.8301	2.9686	3.2655	3.7208	4.3345	5.1066	6.0371	7.126	8.3733
	水文年	0.92	1.5861	2.3916	3.3365	4.4208	5.6445	7.0076	8.5101	10.152	11.9333

4.4　问题 4 的模型建立与求解

利用类似于第 3 小题的模型预测每年长江的总流量和每年废水排放总量（见表 7）：

表 7

2005—2014 年排污总量（亿吨）	2005—2014 年总流量（亿立方米）
227.997 1	9 051
243.530 6	9 633
260.734 5	10 310
279.608 8	11 082
300.153 5	11 950
322.368 6	12 912
346.254 1	13 969
371.810 0	15 121
399.036 3	16 368
427.933 0	17 711

根据上述方法，由过去 10 年每年的长江总流量（亿立方米）和废水排放总量（亿吨）预测出了对未来 10 年每年的长江总流量和废水排放总量，且用柱状图表示为（见图 13）：

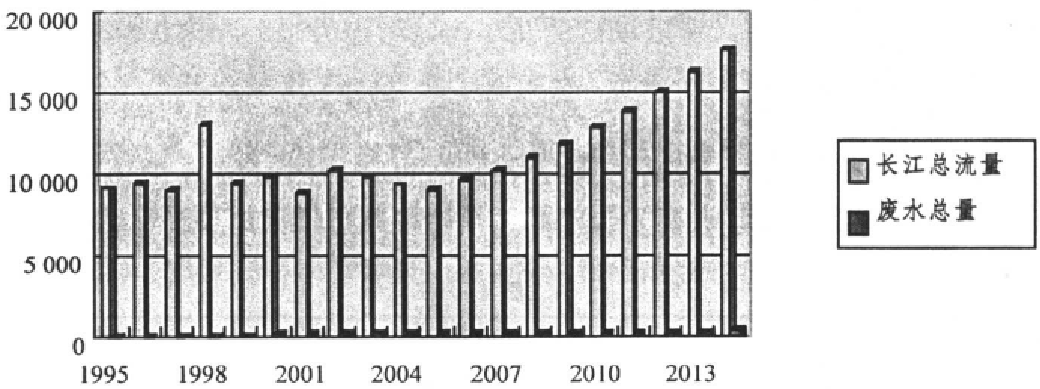


图 13　每年长江的总流量和每年废水排放总量

根据预测分析，未来 10 年内每年都要求长江干流的 IV 类和 V 类水的比例控制在 20% 以内，且没有劣 V 类水，对每年需要处理的污水进行求解.

假设每年的长江总流量就为长江干流总流量，每年废水排放总量即为长江干流废水排放总量；废水排放在每一年的第一天全部排放完；江水通过自然净化能力降解的污水是对上一年的污水进行降解；应对每年做分析，所以水质指标的百分比应为水文年干流的百分比．根据问题要求，每年需要处理的污水为

每年的废水排放总量 +（上一年的第四类 + 第五类的百分比值 − 20%）× 水流总量 + 劣五类水百分比 × 水流量 − 降解的污水量（降解的污水量 = 总流量 × 降解系数 × 1 亿立方米流完长江干流的时间）

1 亿立方米流完长江干流的时间：

$$T = \frac{S}{V} \tag{4}$$

其中，S 为 1995—2004 年水文年全流域评价河长的平均值，S = 24 914.7 km；V 为平均速度．

最后，由表 8 得出各个月的水流速的均值：V = 1.559 341，从而由公式（1）知其时间 T 为 T = 16 天．由题目知一天的降解系数为 0.2，则 T = 16 天降解的主要污染物的系数解为

$$d = \frac{16.42}{365} \times 0.2 = 0.009\ (1/天) \tag{5}$$

表 8　水文年全流域评价河长的平均值

时间	2004-04	2004-05	2004-06	2004-07	2004-08	2004-09	2004-10
水流速	1.557	1.528	1.871	2.014	1.942	3.2	1.957
时间	2004-11	2004-12	2005-01	2005-02	2005-03	2005-04	
水流速	1.271	1.229	0.986	0.886	0.9	0.929	

模型的建立：

2005 年的污水处理量：

$$M_1 = A_1 + (15.7\% + 7.85\% - 20\%) \times B_1 + 9\% \times B_1 - (15.7\% + 7.85\% + 9.0\%) \times B_1 \times c \tag{6}$$

2006—2014 年：

经过 2005 年的处理，已经把长江干流的Ⅳ类和Ⅴ类水的比例控制在 20% 以内，且没有劣Ⅴ类水，且在对污水进行处理，所以以后的几年内就考虑为上一年末Ⅳ类和Ⅴ类水的比例就已经控制在 20% 以内，且没有劣Ⅴ类水．

$$M_i = A_i - 20\% \times B_i \times d, \quad (i = 1, \cdots, 10) \tag{7}$$

通过（6），（7）两个模型，用 C 语言编程就可以准确地算出每年需要处理的污水量（见表 9）：

表 9

年份	2005—2014 年 污水总量（亿吨）	2005—2014 年 总流量（亿立方米）	2005—2014 年 处理污水总量（亿吨）
2005	227.997 1	9 051	197
2006	243.530 6	9 633	226
2007	260.734 5	10 310	241

续表 9

年份	2005—2014 年 污水总量（亿吨）	2005—2014 年 总流量（亿立方米）	2005—2014 年 处理污水总量（亿吨）
2008	279.608 8	11 082	259
2009	300.153 5	11 950	278
2010	322.368 6	12 912	298
2011	346.254 1	13 969	320
2012	371.810 0	15 121	344
2013	399.036 3	16 368	369
2014	427.933 0	17 711	395

4.5 问题 5：建议和意见

以下是对解决长江水质污染问题提出的一些切实可行的建议和意见．可以从保护对策，保障措施方面来解决长江水质污染问题．

4.5.1 保护对策

（1）流域的可持续发展是流域各主要行业可持续发展的总和，所以流域环境保护的成败取决于流域内工、农业发展和城市的环境保护状况．由于工、农业都是位于一定的区域，其环境保护又必须变为当地政府乃至每个公民的具体行动，因而制定环境保护战略一定要与所在区域的发展规划相结合．从整个区域讲，要求环境是可以持续保护的，换句话说，就是环境可作为区域可持续发展的支撑．

（2）长江流域由许多区域共同组成，但各个区域环境保护优化战略的总和并不等于流域的总体优化战略，因此流域的环境保护战略必须把各个相对孤立的区域有机地结合起来．综合考虑应着重研究：上下游及相邻区域环境问题的相互影响以及影响的累积作用，如大气污染的上下风向问题；酸雨问题；上游对下游的排污问题；上游水体的流向改变和流态变化，可能是洪水和淹没问题增长的原因，应研究对对岸及对上、下游的影响；同一区域内各单位排污或相邻河段排污的叠加影响等．要做好区域内的工、农业和城市区划，做好整体布局．

（3）综合整治城市环境，提高现代化水平．城市是政治、经济、文化、商业中心，人口集中，是交通的枢纽．城市能源消耗量大，空气、噪声和水体污染形势都很严峻，各城市政府要把环境综合整治作为改善生活质量、提高现代化水平和可持续发展的重要途径及组成部分．

（4）长江流域是由上述各个区域组成的总体，应在各个区域环境保护优化规划的基础上，再统一进行流域的整体环境保护规划．这个规划是从流域优化出发，重点处理各个区域间的矛盾，并尽最大可能满足各个区域对环境保护和供水等的要求．

4.5.2 保障措施

长江水资源的许多问题，之所以长期得不到解决，除了认识上的问题之外，一个很重要的原因就是在水资源的管理体制、水资源的投资机制和水价政策方面存在问题．因此，实现水资源可持续利用的关键，是进行以上三个方面的改革．从某种意义上说，改革才是解决我国以及长江流域水资源问题的根本出路．

（1）改革水资源的管理体制.

水资源可持续利用必须以法制作保障．目前《中华人民共和国水法》的修订工作正在抓紧进行，其中一项重要内容就是增设“水资源保护”的专门条款，这对于建立和完善我国水资源保护法规体系有着极其重要的意义．另外，国务院颁布的《淮河流域水污染防治暂行条例》为加强流域水资源保护法制建设提供了范例．长江流域的水资源保护迫切需要立法，应根据长江流域的实际需要，制定可行的流域水资源保护法规，使长江水资源保护有法可依，有效控制流域水污染的发展势头；应根据水资源现状以及流域各地区、各城市社会经济发展规划，进一步明确水资源保护的战略目标，从流域整体出发，协调好干流与支流、上游与下游、点源与面源、城市与城市及城市与乡村之间的关系，统筹兼顾、全面规划、综合论证，做好流域水资源保护规划，使水资源保护规划纳入区域和地方国民经济发展规划，以促进社会与自然资源与环境的协调发展.

（2）改革水资源的投资体制.

在水资源可持续利用的投资体制方面，存在着城市供水和污水处理的资金缺口很大、生态建设资金缺乏统一管理、资金投入不足和中央与地方投资的分工不够合理等问题．如流域内普遍存在供水设施需要建设的同时，相应污水处理设施的修建却缺少资金问题，致使不少城市因地表水污染而大量开采地下水；许多地方在严重缺水的同时，大量污水却不能利用；有的地方引用未经处理的污水，造成严重后果.

针对上述问题，应当研究建立长期稳定、有正确导向、全面系统的水资源综合治理投入机制，在水资源的投资机制中应充分考虑水处理方面的需要.

（3）改革水价政策.

长期以来，现行的水价政策与不断提倡的节水、治污和统一调配水资源的战略不相适应．例如，流域的水价每吨只收几分钱，有的省甚至根本不收费，使水资源的合理配置难以实现.

上述种种情况说明，水价是水资源管理中的重要经济杠杆，对水资源的配置和管理起着重要的导向作用，必须在国家水资源管理机构的统一领导下，根据国家确定的水资源战略，明确制定长江流域现阶段的相应水价政策和水价系统.

5 结果分析

根据 SP 模型对此组模型研究的结果说明：用 SP 模型进行水质综合评价属于非函数模式类的评价方法，其评价过程直接由样本系列驱动，方法直观、简便，克服了神经网络等函数模式类评价方法中如何合理构造评价指标集与评价等级之间函数关系的困难；SP 模型的评价结果是实数值，精度高．此方法可在具有评价标准表或具有评价样本系列的其他环境质量综合评价中推广应用.

水质综合评价是根据各水质指标值，对某水体的水质等级进行综合评价，为水体的科学管理和污染防治提供决策依据．基于这一思路，本文提出利用 Shepard 插值方法进行水值综合评价新模型（简称 SP 模型），并对此组模型的结果进行误差分析．结果表明此组模型与实际

值非常接近，所以，此组模型的建立是非常成功的！

6 模型的优缺点评价

本文建立了一组关于单因子评价模型、统计模型、多项式拟合模型为主的复合性模型，充分利用 C 语言编程进行求解，得到一个比较优化的结果；然后根据计算机所得结果，根据约束条件，对模型进行局部优化；然后再利用这些优化后的结果统计分析，统筹安排，得出满足若干约束条件的结果，建立了一个理想化模型．同时在运用 Matlab 进行数据拟合时，得到了较理想化的曲线．在对未来 10 年长江水质的预测时，运用 Matlab 准确地做出了函数图像，使结果一目了然．因此，该模型还是比较合理的．

6.1 主要优点

（1）模型结构清晰、层次分明，数学表达式含义直观、明确、易懂．

（2）从问题出发，分析了应该考虑的各种情况，建立了一般的数学模型，并进行实例验证，从而证明我们建立的数学模型可以较好地解决实际问题．

（3）本模型能与实际紧密联系，结合实际情况，对所给数据进行合理解释，使模型更贴近实际，通用性较强．

（4）此模型具有极为广泛的应用性，对每一个具体的情况，都可以通过模型求解．

6.2 缺 点

（1）基本模型比较简单，但是通过方案改进得到了一组比较好的解．

（2）模型为使计算简便，使所得的结果更理想化，忽略了一些次要因素．如：我们假设长江的长度为 6 300 km，这个长度是 20 年前公认的，并且长江的污染越来越严重，它的长度有变得越来越短的趋势，而题目所给的某些年评价河长甚至超过了这个长度，所以得出的结果可能有一定的误差．

7 模型的改进与推广

7.1 模型的改进

我们的预测模型可以推广到如何控制长江主要污染物的排放方面，致使长江水质达到比较理想的值．针对这一思想，我们又建立了水质数学模型．

一种污染物在两个不同站点段江面上的浓度场实际上是由多点源形成的．如何计算主要分布在不同位置上的污染源所形成的复合浓度场？理论告诉我们，污染源的作用可线性叠加，多个污染源排污对控制点或控制断面的影响，等于各污染源单个影响作用之和．

设模拟长江段有 N 个断面，M 个流管，P 个污染源．a_{ijk} 为第 K 污染源排放单位强度的污染物（比如 1 kg/d）对 i 断面 j 流管的浓度影响值（mg/L），称为影响系数．分别用二维数学模型计算，m_k 为 K 污染源的排污强度（kg/d），c_{oij} 为 i 断面 j 流管的背景浓度（mg/L），c_{ij} 为长江内各站点 P 个污染源在 i 断面 j 流管总的浓度贡献加上背景后的浓度值，则

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{P}(m_k \times a_{ijk})+c_{oij},\quad (i=1,2,\cdots,N;\ j=1,2,\cdots,M) \tag{8}$$

（8）式写成矩阵形式：

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{MA}+\boldsymbol{C}_O \tag{9}$$

式中，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{N\cdot M}$，$\boldsymbol{M}=(m_1,m_2,\cdots,m_p)$，$\boldsymbol{A}=(a_{ijk})_{N\times M\times P}$，$\boldsymbol{C}_O=(c_{oij})_{N\times M}$．

（9）式就是多点源二维复合浓度场模型，利用该模型可以对站点段的水质进行模拟计算．

7.2　模型的推广

本文给出的模型主要解决的是污水预测与评价及其污水处理问题，该模型可以推广到净化水域．如湖泊的水质评价和污水处理以及一定区域内空气质量的评价及空气处理等．

参 考 文 献

[1]　寿纪麟．数学建模．西安：西安交通大学出版社，1993

[2]　高世泽．概率统计引论．重庆：重庆大学出版社，2000

[3]　姜启源．数学模型（第三版）．北京：高等教育出版社，2003

艾滋病疗法及疗效的评价与预测模型

刘建中 陈 坤 李桂贞

【摘 要】本模型是解决艾滋病疗法及疗效的评价与预测问题.

对于问题(1),在分析附件1所给出的数据后,首先根据疗效剔除异常值,把HIV、CD4按照变化趋势的不同分为三大类:上升形、下降形、稳定形;然后对每一类按周次进行排序,求平均值,并反映总体疗效.为了减小数据的波动性,分别对HIV与CD4求自然对数及其对数差分值和HIV与CD4自然对数值的比值.从图形上初步判断出上述指标的变化趋势,以自然对数及其对数差分值和HIV与CD4自然对数值的比值作为预测指标,以周次作为解释变量建立一元多项式回归模型,从中选出最佳的评价指标来预测继续治疗效果或确定最佳终止治疗时间,得到最佳的终止时间28.5~32.9周.

问题(2)是为了评价4种疗法的优劣.在附件2中,发现有些数组序列中CD4的浓度值和HIV的浓度值为0,有些数组波动性过大.因此,首先剔除这些异常值并按疗法分为四类;然后对各类疗法进行单总体均值检验与方差检验,得出各类疗法存在显著性差异的结果,对各类疗法的0,8周次,16周次,24周次,32周次,40周次的CD4平均值作一元多项式回归分析,比较4种疗法,得出最优疗法为疗法4且最佳的终止时间18周.

在解决问题(3)时,不仅要考虑疗效还要考虑治疗费用,综合考虑这两个因素,可将疗法3作为最佳疗法.

【关键词】回归模型 预测指标 最佳疗法 浓度检验

1 问题重述

艾滋病是一种让人谈之色变的疾病,是当今人类面临的最严重的瘟疫之一.它的医学全名为“获得性免疫缺损综合症”,英文简称为AIDS.它是由艾滋病毒HIV侵入人体血液细胞而引起的.该病毒破坏人的免疫系统,严重危害人的生命.人类免疫系统中,CD4细胞在抵御HIV的入侵时起着重要作用.当它被破坏时,其数量将急剧减少,HIV将迅速增加,这就导致了AIDS的发生.艾滋病治疗的目的就是要增加CD4细胞数量,减少HIV的数量,从而提高免疫力.

美国医疗试验机构ACTG公布了两组数据(见题中附件1、附件2):一组是同时服用3种艾滋病药,每隔几周测试CD4与HIV的浓度;另外一组是将1 300多人随机分为4组,按照不同的疗法用药,大约每隔8周测试每组的CD4浓度.现在已经知道4种具体的用药方案,

针对不同的人、不同的情况提出三个问题.

问题 1：如何确定最好的治疗终止时间？

问题 2：如何评价 4 种疗法的优劣，并预测用药最佳终止时间？

问题 3：考虑到不发达国家的经济状况，对问题 2 的结果将有什么改变？

2 基本假设及符号说明

2.1 符号说明

C——CD4 在血液中的浓度；

T——测量的周次（$t=0$，1，2，3，…）；

T_j——最佳的终止治疗时间；

α，β，γ——回归参数.

2.2 基本假设

（1）被检测的病人只服用题目中指定的药物，没有服用其他药物.

（2）接受 4 种疗法治疗的病人均严格按照疗法的规定服药.

（3）被测试的病人血液中 CD4 的浓度和 HIV 的浓度均大于 0.

（4）疗效只用药物对 HIV 和 CD4 的影响来判断.

（5）每个月均有 30 天.

（6）对问题 3 中的病人选定一种疗法后不在改变.

3 数据的分析与模型的建立

3.1 问题 1 的解答

3.1.1 数据分析

观察附件 1 可以发现有些数组序列中 CD4 的浓度值和 HIV 的浓度值为 0，显然这是不合理的数据（见假设（3））. 如在序列 23482 中的 11 周测量到的 CD4 的浓度值为 0，在序列 23478 中的 42 周测量到的 CD4 的浓度值为 0；而另一类数据则是波动性过大，如序列 23531 中第 0 周 CD4 的测量值为 86，而在第 4 周 CD4 的测量值为 210，四周之内骤然猛增. 一般地，药物的疗效都有滞后性，因此，此序列数据波动性过大，显然属于异常数据. 在预测治疗效果时，这些异常数据应给予剔除.

剔除不合理数据后得到的新数据，从整体上观察不论是 CD4 还是 HIV 都呈现出上升形、稳定形、下降形等三种趋势. 为了反映药物在每周的总体疗效，首先对得到的新数据利用 Excel

软件对每个序列划分类型，对于其波动性较大的和 CD4、HIV 为 0 的数据不予考虑，经过筛选后的数据可以得到 CD4 和 HIV 的三种趋势的表格（见附录一的表 1～4）. 从表 1～4 中可以发现 CD4 随周次的增加，其基本趋势为上升形，而 HIV 的浓度随周次的增加，其基本趋势为下降形，显示两者成稳定趋势的数据也只占少数，显示 CD4 下降的和 HIV 上升的数据更是少之又少.

待表 1～4 整理完全后再运用 Excel 软件按周次排序，并利用软件内的 Averagea 函数计算出序列不同而周数相同的平均值并用来反应本周的整体水平. 又因为疗效是由 CD4 浓度的增加和 HIV 的浓度的降低，或 CD4 浓度减少的速度放慢两个指标来反映的，因此可以用 CD4 浓度（或 HIV 浓度）相邻两周的自然对数差来预测治疗效果. 这样做的好处是，一方面降低了数据的波动性，另一方面又可以反应指标的变化率，从而达到一举两得的效果. CD4 浓度和 HIV 浓度的对数差分见表 5（见附录一表 5）.

由表 5 我们已经有 CD4 的自然对数、HIV 的自然对数等 4 个指标，我们现在就是要利用最重要的指标来预测疗效和最佳终止时间. 图 1 是我们在 Excel 软件中，把其中的 4 个指标放在同一个坐标系中观察指标的变化趋势图. 从图中不难发现各个指标基本上是稳定的,但也有少数的突出值. 为了寻找最佳的评价指标，可利用 Matlab 软件对各个指标作回归分析，并且在模型分析和检验中，作详尽的分析，并得出 CD4 与 HIV 的比值为最佳的预测指标（见图 1）.

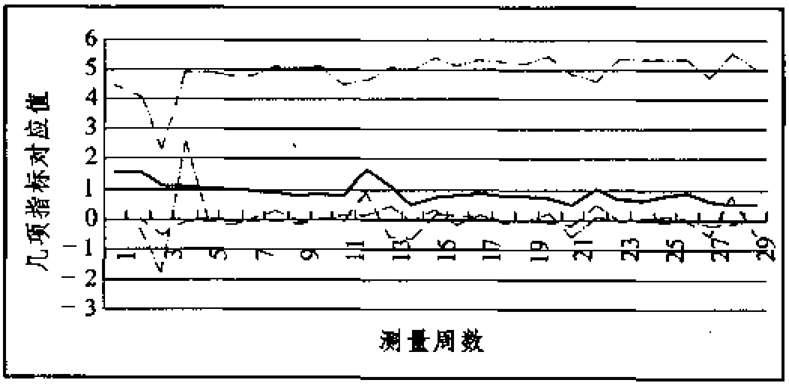


图 1 四项预测指标与测量周数的关系图

3.1.2 模型的建立

为了预测继续治疗的效果，我们采用数值自回归和趋势回归共同来预测继续治疗的效果，达到更好的预测效果. 因为治疗疗效既与 CD4 细胞有关又受 HIV 的制约，所以衡量治疗效果的指标不能只是 HIV 或 CD4. 因此，运用软件 Matlab 编程（程序见附录二-JM2006.1.m）拟合出 CD4 与 HIV 浓度自然对数比值与测量周次的一元多项式回归曲线（见图 2）根据图 2 估计出问题 1 的一元多项式回归模型，即

$$f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$$

利用 Matlab 软件编程得出的相关系数，得到回归方程

$$f(t)=-0.001\,1t^2+0.072\,5t+4.017\,81$$

由回归方程表达式可知，方程图像的顶点就是最佳终止治疗时间，即

$$T=-\frac{\beta}{2\alpha}=32.9$$

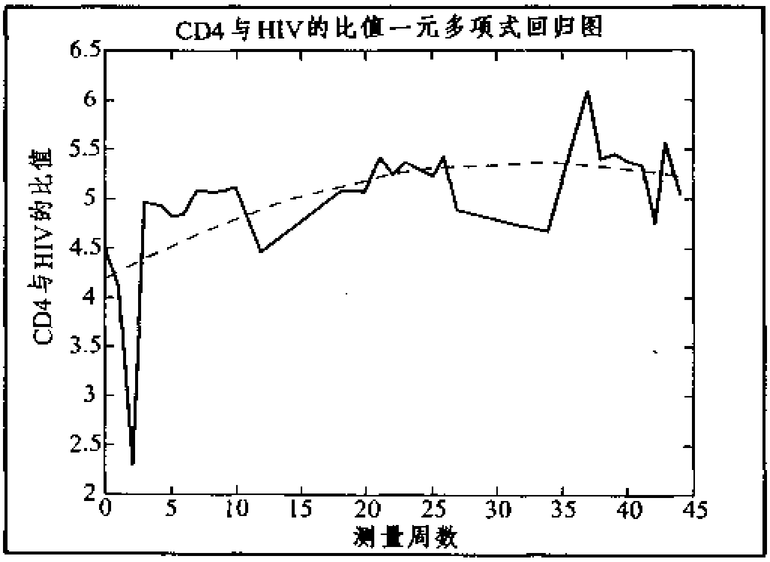


图 2 CD4 与 HIV 的比值与测量周数的关系图

图 3 是以 HIV 与 CD4 浓度的自然对数比值为预测指标的．利用 Matlab 软件作一元多项式的回归曲线，图像拟合效果较好，基本上是呈现开口向上的抛物线形式，抛物线的顶点对应的周数即为最佳的治疗终止时间．

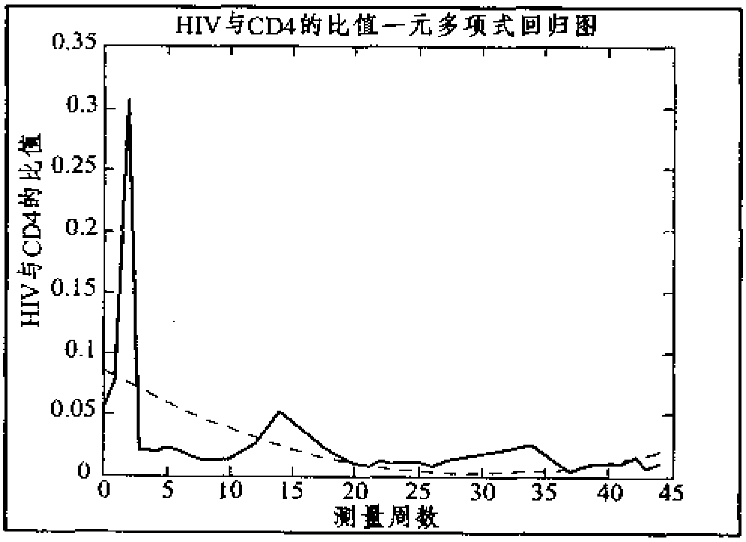


图 3 HIV 与 CD4 的比值与测量周数的关系图

根据图 2 估计出问题 1 的一元多项式回归模型，即

$$f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$$

利用 Matlab 编程得出的相关系数得到回归方程

$$f(t)=0.0001t^2-0.0057t+0.0865$$

由回归方程表达式可知，方程图像的顶点即为最佳的终止治疗时间，即

$$T=-\frac{\beta}{2\alpha}=28.5$$

以 CD4 与 HIV 的比值和 HIV 与 CD4 的比值作为预测指标，得到最佳的终止治疗时间 32.9

和 28.5 周．然而我们不能单单说其中某个值就是最佳终止时间，因其本身就是利用数据拟合做出的回归模型，存在误差，所以最佳的终止时间应该在 28.5～32.9 周这个时间段内．

3.2 问题 2 的解答

3.2.1 问题 2 的分析

问题 2 是要求仅以 CD4 为标准，评价 4 种疗法的优劣，并对较优的疗法预测继续治疗的效果或者确定最佳的治疗终止时间．由附件 2 的数据可以发现这样两类异常数据，对这些异常数据给予剔除处理．第一类是只测量了第 0 周 CD4 的值，剔除这类数据对预测和评价没有影响，反之，评价和预测会产生偏差．第二类是 CD4 测量值为 0 的数据．根据生物学知识可知：正常人体内每毫升血压会有 500～900 个 CD4，但 HIV 病毒感染者体内的 CD4 因为 HIV 的侵蚀而越来越少，侵蚀的过程就是所谓的潜伏期，在低于 500 个以前感染者从外表看起来与正常人没什么差别，但经过通常是 5～8 年的侵蚀，CD4 低于 500 个时，人的免疫系统就很脆弱，这时候很多病原体乘虚而入．大多数艾滋病病人在发病时，每毫升血内的 CD4 不到 200 个，但是一般不会出现 0 个的情况，如果出现这种情况，病人也就濒临死亡了．因此剔除这两类数据得到比较合理的数据．

在 Excel 内通过对疗法排序得到 4 个疗法的相关数据，然后对上述两类数据给予剔除，再按周次排序得到相应的表格．又因为附件 2 是将 1 300 多名病人随机地分为 4 组，每组按下述 4 种疗法中的一种服药，大约每隔 8 周测试的 CD4 浓度，所以每个疗法测试 CD4 的浓度在 0，8 周次，16 周次，24 周次，32 周次，40 周次附近密集．为了排除小概率数据对整体的干扰，把游离在 8 的倍数之间的数近似地看做最接近的 8 的倍数系列，比如把 0～4 周的 CD4 测量值归为 0 周，把 4～8 周的 CD4 测量值归为第 8 周的测量数据，然后分别求出 0，8 周次，16 周次，24 周次，32 周次，40 周次 CD4 浓度的平均值以及各个周次总体的方差及平均值．得出表 1：

表 1　4 种疗法各周的 CD4 的浓度

每周 CD4 浓度 / 测量周次	疗法 1	疗法 2	疗法 3	疗法 4
0	2.988 175	3.027 53	3.035 868	2.910 138
8	2.951 78	3.052 588	3.207 554	3.081 493
16	2.878 836	2.953 424	3.114 923	2.957 359
24	2.672 921	2.810 965	2.923 423	2.780 429
32	2.646 921	2.774 802	2.996 124	2.811 747
40	2.582 878	2.646 375	2.878 075	2.780 514
方差	0.150 359	0.127 322	0.074 263	0.071 673
平均值	2.786 919	2.877 614	3.025 995	2.886 947

为了评价 4 种疗法的优劣，利用数学软件 Matlab 编程（程序见附录二-JM2006.2.m）绘出 4 种疗法测量周次与各周 CD4 浓度的平均值的关系图（见图 4）．分析图 4 发现总体趋势都是下降的．为了寻找最佳的疗法，我们分别做了单因素方差分析和总体均值的 t-检验，得出疗法 4 最优．

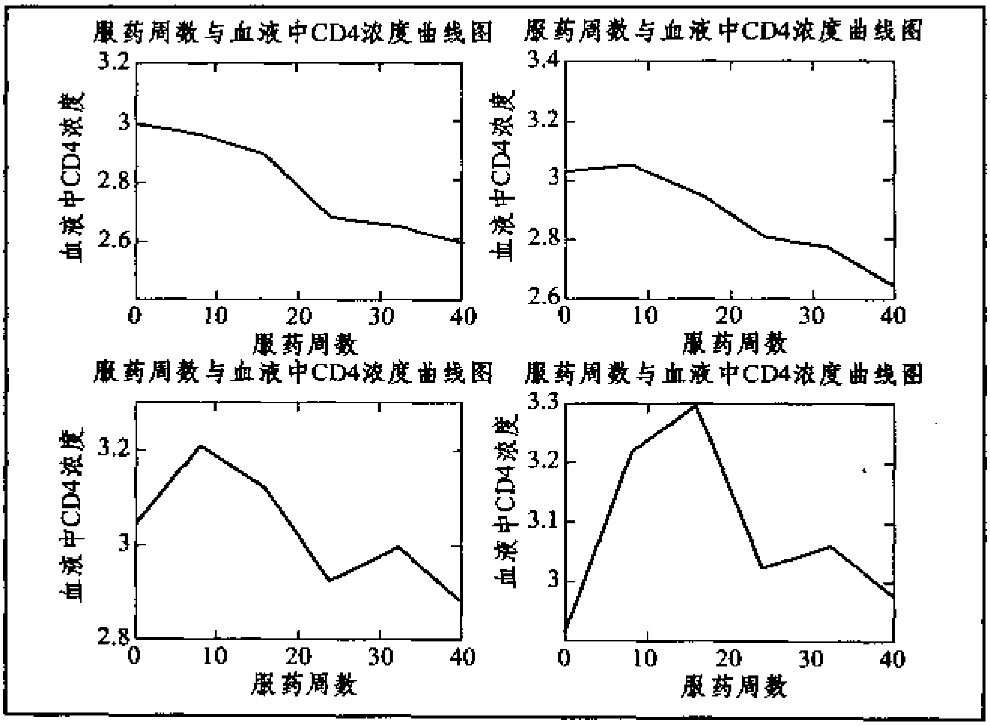


图 4　4 种疗法测量周次与各周 CD4 浓度的平均值的关系图

3.2.2　假设与检验

（1）t-检验总体的平均值.

平均值是反应样本的整体水平的. 首先利用 Matlab 编程（程序见附录二-JM2006.2.m）对 4 种疗法的平均值进行检验. 此程序是检验数 X 的关于均值的某一假设是否成立，其中 alpha 为显著水平，究竟检验什么假设取决于 tail 的取值.

tail = 0，检验假设的均值等于 m；

tail = 1，检验假设的均值大于 m；

tail = –1，检验假设的均值小于 m；

tail 的缺省值为 0，alpha 的缺省值为 0.05.

返回值 h 为一个布尔值，$h=1$ 表示可以拒绝假设，$h=0$ 表示不可以拒绝假设，sig 为假设成立的概率，ci 为均值的 1-alpha 置信区间.

运行结果：

h = 0　sig = 0.189 5　ci = 2.604 9　2.968 9
h = 0　sig = 0.807 3　ci = 2.710 1　3.045 1
h = 1　sig = 0.045 7　ci = 2.898 1　3.153 9
h = 1　sig = 0.024 0　ci = 2.931 4　3.233 5

从运行结果来看，各个疗法的假设均成立，即均值也符合正态分布. 而且不难看出疗法 4 假设成立的概率、均值的置信度都最大，所以疗法 4 的均值最具可信度.

（2）单因素方差分析.

一组数据的方差反应整体数据的波动性，而且方差越小越好. 在（1）中得知，在不考虑方差时，疗法 4 的效果最好. 现在换角度从方差上比较 4 种疗法的疗效，如果得出疗效 4 的效果最好，那我们就可以肯定疗法 4 是最好的.

根据 4 种疗法的方差运用 Matlab 软件编程(程序见附录-JM2006.3.m)得到方差分析图(见图 5) 方差分析表 (见图 6).

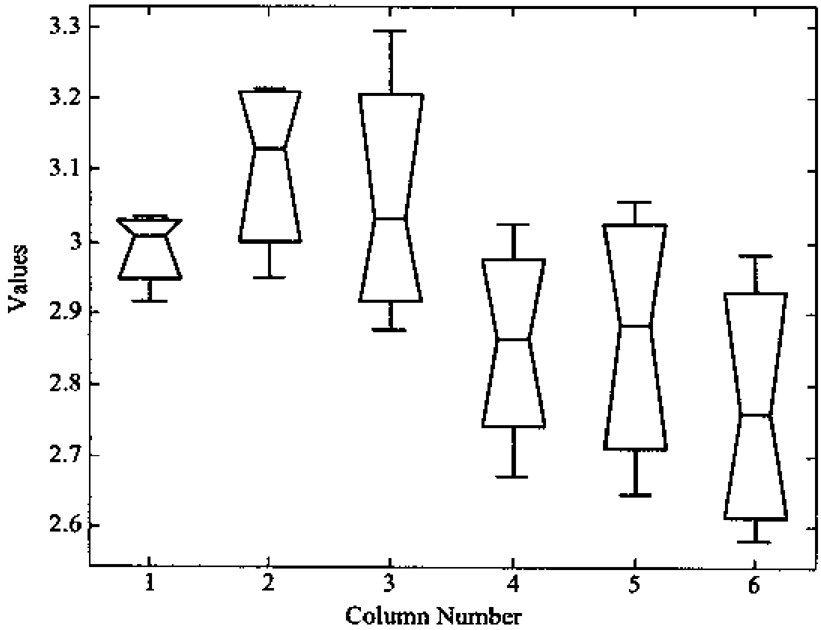


图 5 方差分析图

ANOVA Table

Source	ss	df	MS	F	Prob>F
Columns	0.33827	5	0.06765	2.72	0.053
Error	0.44711	18	0.02484		
Total	0.78538	23			

图 6 方差分析表

方差分析表的最后一项，即 F 统计量的上侧概率值为 0.053. 它表示该统计量落入拒绝域. 而且疗法 4 的方差值最小，说明疗法 4 的 CD4 曲线波动比较小，效果较好. F 统计量的上侧概率略高于 0.05，说明其影响不是很大.

通过考察 4 种疗法的平均值和方差，可以发现疗法 4 的疗效最好. 为了预测各个疗法治疗的效果，确定最佳的终止时间，我们以周次为时间序列与 CD4 的浓度在 Matlab 软件中作非线形回归 (程序见附录二-JM2006.4.m)，得到非线形回归的曲线，如图 7 所示：

根据图 7 估计出问题 1 的一元多项式回归模型，即

$$C_i(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma,\quad (i=1,2,3,4)$$

利用 Matlab 软件编程得出的相关系数，得到回归方程组，即

$$\begin{cases}C_1(t)=-0.0118\times t+3.0147\\C_2(t)=-0.0001\times t^2-0.0045\times t+3.0528\\C_3(t)=-0.0002\times t^2+0.003\times t+3.0945\\C_4(t)=-0.0006\times t^2+0.0217\times t+2.9879\end{cases}$$

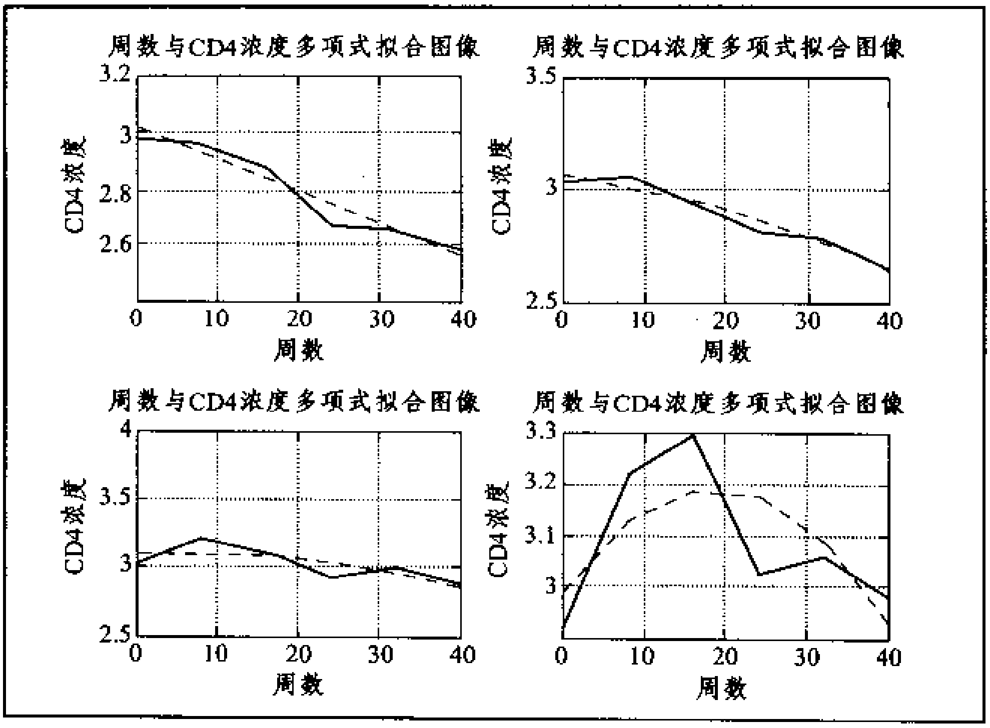


图 7　CD4 浓度与测量周数的非线形回归曲线

由图形和模型可知，疗法 1 随周次的增加，CD4 一直呈下降的趋势，几乎呈直线状态，即 CD4 的下降速度没有减小，这与治疗的目的相悖，因此，我们认为疗法 1 的治疗效果最差. 疗法 2 随周次的增加，CD4 开始稍有上升，随后又呈现下降的趋势，但是它的下降速率比疗法 1 的小. 观察疗法 3 的曲线图，发现随周数的增加，它几乎在平稳的变化. 疗法 4 明显不同于其他三幅图形. CD4 先迅速增加后速率下降，但仍呈下降趋势，类似于抛物线形式. 这些说明开始药物对 HIV 起到抑制作用，从而降低了 CD4 的减少的速度，但是经过几周的时间，HIV 产生了抗药作用，再次使得 CD4 的减少速度上升，对于病人来说疗法 4 是最优的疗法. 我们可以根据它所拟合的回归模型来预测继续治疗的效果和最佳的治疗终止时期.

由得出的回归方程 C_4 的表达式可知，方程图像的顶点就是最佳的终止治疗时间，即

$$T=-\frac{\beta}{2\alpha}=18.09\text{ 周}$$

3.3　问题 3 的解答

对于不发达国家来说，艾滋病的治疗不仅要考虑疗效问题，还有一个更重要的指标就是经济问题. 不发达国家的经济比较落后，在疗效很好的情况下，病人不一定能够承受其价格. 所以每一种疗法在相同时间里所需要的费用是我们要考虑的重要因素（见表 2）. 由于第一种疗法的药物是按月轮换使用，所以考虑的服药最短时间为两个月. 由题中所给的数据，可以算出四种疗法在两个月内所需的医疗费为：第 1 种疗法：73.5 美元；第 2 种疗法：207 美元；第 3 种疗法：147 美元；第 4 种疗法：219 美元. 很显然第 2 和第 4 种疗法对不发达国家来说非常昂贵，第 1 种疗法最便宜，所以我们首先不应该考虑第 2 和第 4 种疗法，第 1 和第 3 种疗法我们初步可以考虑作为不发达国家的疗法.

对第二问中 4 种疗法的治疗效果按由好到一般进行排序，即第 4 种，第 3 种，第 2 种，第 1 种．因为第 1 种的疗效没有第 3 种的疗效理想，所以我们采用第 3 种疗法．

表 2　4 种疗法的费用表

疗　　法	1	2	3	4
费用（美元/两月）	73.5	207	147	219

在我们考虑了疗效和经济的相互制约后，4 种疗法中最好的就是第 3 种．

我们从下面的 4 幅图形效果来分析，发现第 1 种疗法血液中的 CD4 细胞呈直线下降趋势，而且我们用的多项式回归很好的证明了这一点．所以对于第 1 种疗法应该提前终止，如果继续用药只是浪费金钱，这对于患者本人来说是没有丝毫作用的．

对于第 2 种治疗方法，从图像中，我们可以看出服药后 CD4 细胞有一个上升的过程，但是马上又呈直线下降趋势，所以疗法 2 的效果也不是很好．但是疗法 2 的费用很高，主要是其中的 zalcitabine（扎西他滨）费用很高．从第 1 与第 2 种疗法中，我们可以分析出药 zalcitabine（扎西他滨）对 HIV 病毒有一定的抑制作用，而 zidovudine（齐多夫定）药效很差，只是对病人起到一定的安慰作用，所以对于重症病人可以用第 1 种疗法．对于第 3 种疗法，我们可以从图中看到，用药后 CD4 浓度有上升趋势，既而转如缓慢的下降趋势．这种疗法是比较好的，是符合实际的，也是容易让病人接受的．因为在治疗过程中 CD4 波动比较小，而且费用也不是很高，介于中等消费水平．对发展中国家来说是比较容易接受的．第 4 种疗法是费用最高的，当然效果也是最好的，但是对于经济状况不是很好的发展中国家来说，这种方法是不适合的．但是它的疗效是显著的，因为我们可以从图中看到用药后 CD4 细胞上升很快，对 HIV 病毒有很好的抑制作用（见图 8）．

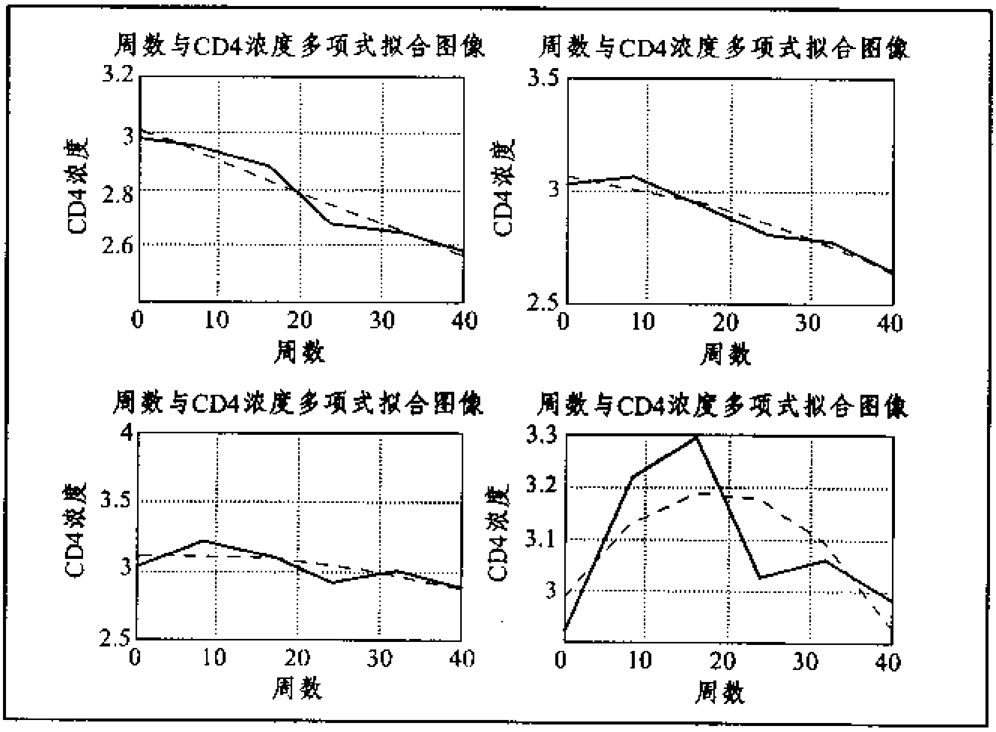


图 8　CD4 浓度与测量周数的非线性回归曲线

4　模型分析与检验

问题 1 的检验：

经过一系列的数据处理后,我们得到了 4 个衡量指标，为了更准确、更精确地预测继续治疗的效果，需要分别比较不同指标并利用 Matlab 软件做一元多项式回归分析，再比较 4 种指标对应的最佳治疗终止时间和变化趋势.

图 9 是以 CD4 浓度取自然对数为衡量指标，利用 Matlab 做一元多项式的回归曲线图．从图像看拟合效果较好，基本上是呈现开口向上的抛物线形式，抛物线的顶点对应的周数变为最佳的治疗终止时间．从而估计问题 1 的一元多项式回归模型为

$$f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$$

利用 Matlab 编程得出的结果得到回归方程

$$f(t)=-0.0008\,t^2+0.0541t+4.2840$$

从得出的回归方程表达式可知，方程图像的顶点就是最佳的终止治疗时间，即

$$T=-\frac{\beta}{2\alpha}=33.8$$

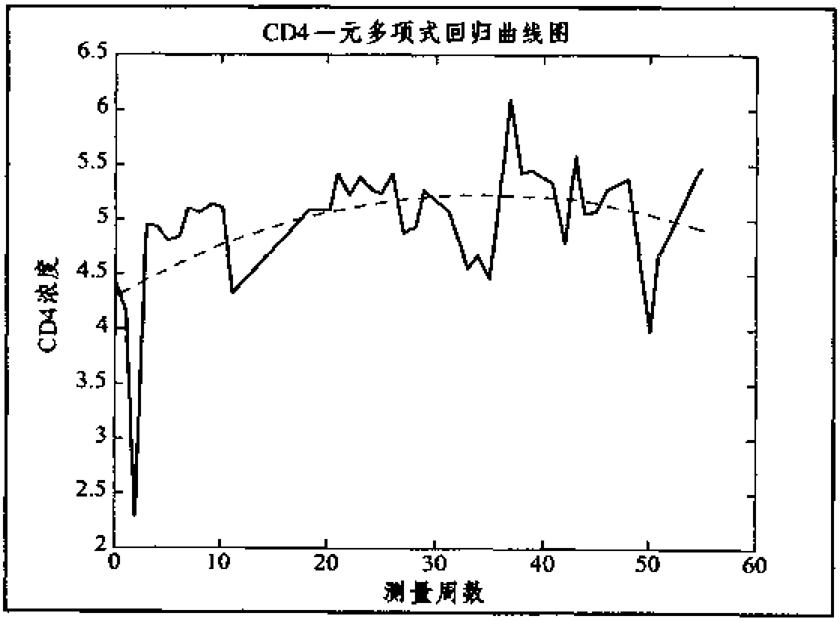


图 9　CD4 一元多项式回归曲线图

图 10 是以 HIV 浓度的自然对数为衡量指标，利用 Matlab 做一元多项式的回归曲线图．从图像看拟合效果较好，基本上是呈现开口向下的抛物线形式，抛物线的顶点对应的周数变为最佳的治疗终止时间．从而估计问题 1 的一元多项式回归模型为

$$f(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$$

利用 Matlab 编程得出的结果得到回归方程

$$f(t)=0.0004t^2-0.0299t+1.2815$$

从得出的回归方程表达式可知，方程图像的顶点就是最佳的终止治疗时间，即

$$T=-\frac{\beta}{2\alpha}=37.47$$

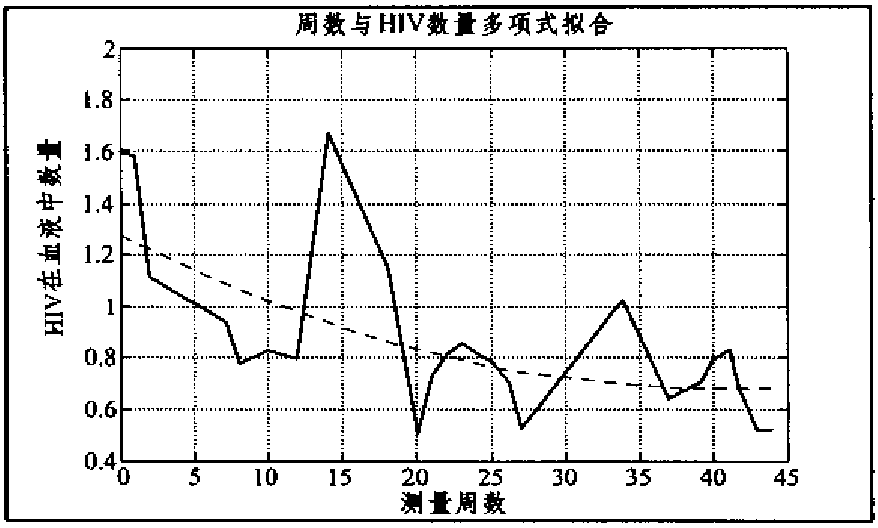


图 10　周数与 HIV 数量多项式拟合

图 11 是以 HIV 与 CD4 浓度的自然对数比值为衡量指标，利用 Matlab 做一元多项式的回归曲线图．从图像看拟合效果较好，基本上是呈现开口向上的抛物线形式，抛物线的顶点对应的周数变为最佳的治疗终止时间．从而估计问题 1 的一元多项式回归模型为

$$f(t)=\alpha t^2=\beta t+\gamma$$

利用 Matlab 编程得出的结果得到回归方程

$$f(t)=0.000\,1t^2-0.005\,7t+0.086\,5$$

得出的回归方程表达式可知，方程图像的顶点就是最佳的终止治疗时间，即

$$T=-\frac{\beta}{2\alpha}=28.5$$

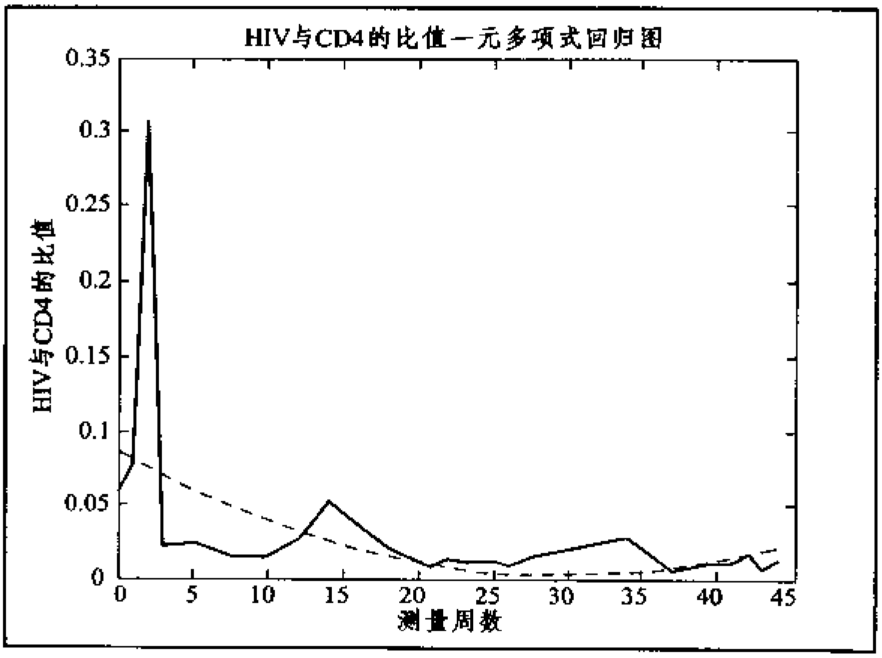


图 11　HIV 与 CD4 的比值一元多项式回归图

综上所述，我们按不同的衡量指标得出了四个最佳终止治疗时间，得到了表3．又因为艾滋病治疗的目的，是尽量减少人体内HIV的数量，同时产生更多的CD4细胞，至少要有效地减少CD4细胞的速度，以提高人体的免疫力．所以只涉及HIV，CD4一种因素的指标就具有片面性．

表3 衡量指标与最佳终止治疗时间表

衡量指标	CD4浓度取自然对数	HIV浓度的自然对数	HI与CD4浓度的自然对数比值	CD4与HIV浓度自然对数的比值
最佳终止治疗时间（周）	33.8	37.47	28.5	32.9

5 模型的评价

5.1 模型的优点

（1）运用常用软件Excel对大量数据进行处理，不仅剔除了不合理的数据，而且对所需数据作了筛选和分类，使得问题更简单、更明了．

（2）灵活的利用Excel处理题目所较复杂的数据，使问题简单化．

（3）解决问题2时，从方差和平均值两个指标来考虑，得到结果．

（4）绘制了多个表格和图形，使问题更直观、更明了．

5.2 模型的缺点

（1）本文模型中的某些参数仅是依靠题中给出的一些数据求解得出，与实际情况可能有一点偏差．

（2）为使问题简单化，作出了一些理想化的假设．如，每个月均有30天．

6 模型的改进与推广

针对问题中出现的大量数据，我们选择了非线性回归分析中的一元多项式回归分析来进行预测，取得了很好的效果．在建立模型的过程当中，运用了Excel对原始数据进行了奇异值的剔除，并且对原始数据进行了分类，即上升的、下降的，平衡的．另外，还应该对病人病情的轻重进行分类，但是由于时间关系我们没有按病情进行分类．这样在运用多项式回归分析的时候就有一点误差，模型的优度还需要提升．用Matlab软件对分析后的数据作出了拟合图像，根据结果得出了回归方程．根据方程就得出了问题的答案．

本模型可以用于很多疾病疗法的评价与疗效的预测，不光是AIDS，在医学研究与医疗效

果的预测中起很大的作用，也可以用于一些非医疗情形的预测.

参 考 文 献

[1] 赵静，但琦. 数学建模与数学实验. 北京：高等教育出版社，2000

[2] 姜启源. 数学模型. 北京：高等教育出版社，2003

[3] 区靖祥等. 多元数据的统计分析方法. 北京：中国农业科学技术出版社，2002

出版社资源配置模型

牟　维　罗先锋　曾　敬

【摘　要】本模型研究出版社书号的资源配置，涉及长远发展战略和当年经济效益两大重要指标．我们首先分析了问题中五个附表的相关指标及数据，根据Markov链和环比增长速度有关理论，建立了2006年相关因素预测的新算法，借助Matlab工具箱对其进行了很好的科学预测，为决策者提供了较为准确的达成信息．在此基础上，根据决策论及系统论的有关理论和思想方法，得到了与出版总社资源配置决策高度关注的权益短期利益和长期利益强相关的两大一级目标、五大重要属性，以增加强势产品支持力度的原则，依据最优化理论，建立了一个整数多级目标决策与多目标整数规划模型．在对目标函数值归一化处理后，得到了一个较为简明的单目标规划模型，通过Lingo8.0编程，得到总社统筹权益短期与长期利益后的书号分配决策方案，1～9各分社书号数量为：

62　34　111　76　36　38　43　49　51

对应的1～72课程书号数见文中表3．然后我们讨论了出版社的二级管理体制，即分社在得到总社的分配方案之后，以分社当年利润最大化为目标对分配方案进行再次分配，建立了相应的分社资源配置模型，以2006年预测数据为依据，求解模型获得了相应的具体实施方案．同时，我们还就分社在书号再分配上有无机动性的问题进行了讨论，并进一步完善了模型．最后将模型进行推广，为出版社系统决策、满意决策提供了合理化的建议．

【关键词】多目标整数规划　强势产品　决策论　满意解

1　问题重述

书号是出版社的核心资源，出版社的其他资源（人力资源、生产资源、资金和管理资源等）均围绕书号，经各部门的统筹配置，形成利润和成本．

出版社A以教材类出版物为主，总社领导每年根据下属九个分社提交的生产计划申请书、人力资源情况以及市场信息分析，将总量一定的书号数合理地分配给各个分社，使出版社A产生最好的经济效益．事实上，由于各个分社提交的需求书号总量远大于总社的书号总量，所以在考虑保持工作连续性和对各分社计划一定程度的认可的基础上，总社一般在增加强势产品支持力度的原则下优化资源配置．资源配置完成后，各个分社（分社以学科划分）根据分配到的书号数量，再重新对学科所属每个课程做出出版计划，付诸实施．

资源配置是出版社市场运作的核心问题，直接关系到出版社的当年经济效益和长远发展

战略．但是由于企业对市场以及自身信息的收集和积累不足，每年的资源（书号）配置决策就面临巨大风险，为此需建立一种模型，在强势产品定位以及出版社资源的双重约束下，给出一个明确的分配方案，向出版社提供有益的建议．

2 符号说明及模型假设

2.1 符号说明

x_i——2006年实际分配给第 i 个分社的书号数量；
x_{ij}——2006年分配给第 i 个分社第 j 门课程的书号数量；
X_i——2006年第 i 个分社申请的书号数量；
y_{ij}——2006第 i 个分社第 j 门课程单位书号平均销售量；
z_{ij}——2006年第 i 个分社第 j 门课程期望销售量；
n_i——2006年第 i 个分社含有的总书号个数；
a_i——第 i 分社策划人员平均工作能力；
A_i——第 i 分社策划人员数量；
b_i——第 i 分社编辑人员平均工作能力；
B_i——第 i 分社编辑人员数量；
c_i——第 i 分社校对人员平均工作能力；
C_i——第 i 分社校对人员数量；
r——A 出版社教材利润率；
s_{ij}——第 i 个分社第 j 门课程每本教材的均价；
ρ_{ij}——A 出版社2006年第 i 个分社第 j 门课程的市场占有率；
α_{ij}——2006年第 i 个分社第 j 门课程的满意度；
β_{ij}——2006年第 i 个分社第 j 门课程的销售量的增长速度；
γ_{ij}——2006年第 i 个分社第 j 门课程的市场占有率增长速度；
λ_{ij}——2006年第 i 个分社第 j 门课程的计划可信度；
μ_{ij}——2006年第 i 个分社第 j 门课程的印张单价．

$$(i=1,2,\cdots,9,\quad j=1,2,\cdots,n_i)$$

2.2 模型假设

（1）同一课程中不同书的价格差别不大，同时销售量相近．

（2）书价中成本部分是编制发行一本教材的所有成本总和在数值上的体现，即收益率为净利润，该出版社在定价时保持对所有教材的利润率 r 为常数．

（3）本问题暂不考虑新的人力资源计划以及每年各个部门人员总数与能力的变化．

（4）为保持工作连续性和对各分社计划一定程度的认可，A 出版社在分配书号时至少保证分给各分社数量申请的一半．

(5) 设以增加强势产品支持力度的原则优化资源配置.

(6) 调查问卷所反映的是当前学生使用教材的情况.

(7) 只考虑 A 出版社所关注的 72 门课程的情况.

(8) 附件中的数据是经过认真调查得到的，有较大的可靠性.

(9) A 出版社关注眼前利益和长远发展战略.

3 问题分析与模型建立

3.1 问题分析

纵观出版社所关注的各项指标，其资源配置是多目标规划问题，属决策类范畴. 决策论的一般理论已比较成熟，解决实际问题创意的部分主要体现在确定目标函数和约束条件上，在此，我们根据决策论的有关理论和实际，解决本问题.

3.1.1 书号对于出版社的战略重要性

资源配置是总社每年进行的重要决策，直接关系到出版社的当年经济效益和长远发展战略. 而书号配置是资源配置核心环节，对出版社将产生短期和长期的深远影响. 在短期中，出版社仅考虑当年经济效益，书号分配当然以当年售书利润最大化为目标；在长期中，出版社更看重出版社核心竞争力的全面实现，获得更大的市场认同. 利用强势产品的市场占有率、教材满意度等方面的优势，提高出版社在读者心目中的地位，实现在市场竞争中生产经营的可持续发展，这将是总社长期关注的两大一级目标.

3.1.2 书号分配的决策过程

总社在充分权益出版社短期与长期利益后，密切注视两个重要指标：当年利润和出版社长远发展竞争力，制定出当年的书号分配方案，并将其下达至各个分社. 出版总社对分社的管理往往有两种模式：

(1) 总社对书号的分配计划，分社在书号分配上没有机动性；

(2) 总社对书号的分配计划，分社在书号再分配上有一定的机动性.

在现实中，分社更关注当年的利润问题，各分社期望结合自身实际情况，根据本社分配到的书号进行再分配，对分配方案予以微调，重新对学科所属的每个课程做出出版计划，并付诸实施. 基于此，在资源配置时，我们将按第二种管理模式研究 A 出版社书号分配问题，以加大各分社管理执政力度.

3.1.3 建模思路

首先，我们建立总社权益短期与长期利益的权益模型. 短期利益为 2006 年售书利润最大化，处理长期利益时，我们综合考虑市场占有率、教材满意度等，认为其可持续发展强势将包括满意度、市场占有率增长速度、单位书号销售量增长速度、计划可信度和单位印张价格等五大重要属性. 在此基础上，获得每门课程的"强势产品"属性，长期利益应为各"强势产品"属性加权和最大化.

然后，我们再建立分社的微调模型，由于分社属于二级承包单位，根据上述分析，我们认为分社关注经济利益最大化，并以此为基础，对总社下达的分配方案进行微调.

3.2 权益模型（模型 1）

3.2.1 短期利益

（1）目标函数.

根据假设 1 和假设 2，出版社每销售一本教材，所得利润为：$s_j \times r$；出版社的年度利润总和为：$\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{n_i} z_{ij} \times s_j \times r$；在各个分社申报当年需求书号量时，普遍倾向于在上一年的基础上有所增加，使当年分社销售量有所提高，书号数目的多少直接影响课程的实际销售量，即 $z_{ij} = x_{ij} \times y_j$；出版社所追求的 2006 年利润最大化表示为

$$\max R_1 = \sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \times y_j \times s_j \times r \tag{1}$$

（2）预测.

由（1）式知，2006 年 A 出版社的利润被分解为四个要素，即 x_{ij}（2006 年分配给各个分社各门课程的书号数），y_j（2006 年各门课程单位书号平均销售量），s_j（2006 年各门课程的课程均价）以及 r（单位教材的利润率）. 其中，r 为由出版社内部既定的常量，s_j 为题目已知（附件 4），x_{ij} 是模型需要求解的未知量. 所以求解（1）式的关键就是预测 y_j. 根据附件 3 与附件 4 的数据，计算 $\frac{z_{ij}}{x_{ij}}$，得到一个 5×72 阶矩阵. 该矩阵表示 72 门课程在 2001—2005 期间每年的单位书号的实际销售量.

由于只能得出 5 年的数据，故从中获得的信息较少，我们很难根据这些数据找出它们变化的规律，试用了指数平滑等多种方法都不够理想. 为了能更好地利用这些数据预测 2006 年，采用了马尔可夫（Markov）预测法和环比增长速度有关理论，建立了预测 2006 年单位书号销售量的新算法.

第一步：计算前 5 年的平均增量和平均减量：

当 $Z_{k+1} - Z_k \geqslant 0$ 时，视为增量；所有增加量之和除以增大频次即得平均增量 $Z_{增}$. 可类似得到平均减量. 式中，k 表示年份（$k = 1, 2, \cdots, 5$）；Z_k 为第 k 年的实际销售量.

第二步：计算增概率与减概率：

增概率：$\rho_{增}$ = 增加的频次/总变化频次

减概率：$\rho_{减}$ = 减少的频次/总变化频次

第三步：预测 2006 年单位书号的实际销售量：

2006 年单位书号的实际销售量 = 2005 年的实际销售量+（平均增量 × 增概率 + 平均减量 × 减概率）

即

$$y_{2006j} = y_{2005j} + ((Z_{增} \times \rho_{增} + Z_{减} \times \rho_{减}) \tag{2}$$

将上述步骤由 Matlab7.0 实现，所得结果见附录一. 从各项统计指标看较为满意，以下对 2006 年其他预测均用此法.

3.2.2 长期利益

(1) 长期利益包含的要素.

从长期看，总社领导不仅希望出版社的每年利润最大化，而且希望出版社在市场占有率、教材满意度、出版社出版能力、人力资源等方面逐渐加强，以获得更大的经济利润、更高的行业地位以及更广泛的社会褒奖. 而这些方面的进步正反映了出版社可持续发展的势头，试想一个只为当前利润考虑而不顾今后发展的出版社是不会在竞争激烈的市场中站住脚的.

不难发现，长期利益同时兼顾短期利益和可持续发展，在 3.2.1 中，我们已经讨论了短期利益，在长期利益模型中，我们仅讨论影响出版社可持续发展的五大要素.

综合考察附件中的数据，我们得出以下五项反映出版物可持续发展，即强势产品的主要因素：① 满意度，② 同类书市场占有率，③ 销量年增长率，④ 计划可信度，⑤ 书的单页定价.

下面分别论述：

① 满意度：根据附件 2 中第 Q21 列，满意度是读者对某出版物四个侧面的满意度的综合体现，反映了读者对该出版物的认同与喜爱程度. 由于消费具有连贯性，一个满意度较高的产品会在以后的销售周期中获得更多的消费倾向，增加销售量. 满意度反映了出版物在消费人群中消费偏好的可持续发展.

② 市场占有率增长速度：附件 2 中，市场占有率增长速度为 $\dfrac{\rho_{(k+1),ij}-\rho_{k,ij}}{\rho_{k,ij}}$（市场占有率 $\rho_{k,ij}=\dfrac{n_{p115k,ij}}{N_{k,ij}}$； $n_{p115kij}$ 表示问卷调查中 k 年使用 A 出版社出版的第 i 个分社第 j 门课程教材的人数，$N_{k,ij}$ 表示 k 年使用第 i 个分社第 j 门课程教材的总人数）. 市场占有率刻画的是某课程出版物在市场中的地位，其增长速度反映了它控制市场能力的增长快慢程度，市场占有率增长速度对出版社的可持续发展有重要的预警作用.

③ 单位书号销售量增长速度：附件 3，4 中，有 $\dfrac{y_{(k+1),ij}-y_{k,ij}}{y_{k,ij}}$. 单位书号销售量刻画的是出版社对某课程出版物的出版能力与市场需求量博弈权衡的结果，其增长速度则反映了出版能力的增长以及买方市场拓展的快慢程度. 单位书号销售量的正增长速度是出版社可持续出版图书的保证，也反映了市场对该课程的消化能力的增强；而持续的负增长速度则证明该课程是一门夕阳课程，应接受改造或被淘汰.

④ 计划可信度：附件 3 中，有 $\dfrac{z_{k,ij}}{z'_{k,ij}}$（$z'_{k,ii}$ 表示 k 年第 i 个分社第 j 门课程的计划销售量）. 计划可信度表示各门课程（或分社）提交的计划销售量的可信度，它监督那些为了获得更多书号而虚报计划的部门. 诚信是出版社可持续发展的必要条件.

⑤ 单位印张价格：附件 2 中，有 $\dfrac{Q_{2j}}{Q_{2i}}$（此处的 Q_{2j} 和 Q_{2i} 分别为附件 2 中的定价和印张）. 单位印张价格，即是一张全开纸的价格，直接反应某课程教材的平均定价. 由于 A 出版社是一

家以教材类出版物为主的出版社，所以其出版物的纸张质量要求和作者稿费不高，且消费人群多为学生，定价更应偏低．持续偏高的单位印张价格会使出版社失去消费者的支持，短期的利润增大会使出版社失去可持续发展的动力．

另外，还有若干没有在考虑之内的指标．下面进一步对表二进行分析．表二是调查数据的总结，下面我们分析它的深层含义（见表 1）．

表 1

Q_1 A 出版社在您心中的位置（Q_1）	Q_{2a} 课程名称（Q_{2a}）	Q_{2b} 课程类型 A（Q_{2b}A）	Q_{2b} 课程类型 B（Q_{2b}B）
Q_{2c} 学科类别（Q_{2c}）	Q_{2d} 使用册数（Q_{2d}）	Q_{2e} 教材名称（Q_{2e}）	Q_{2f} 教材获得方式（Q_{2f}）
Q_{2g} 出版社代码（Q_{2g}）	Q_{2h} 版次年（Q_{2h_1}）	Q_{2h} 版次月（Q_{2h_2}）	Q_{2i} 印张（Q_{2i}）
Q_{2l}：对该书的满意度评价			

对附件中相关参数的理解：

① 表二中“专业名称”，和“学校代码”分析：从 2001—2005 年的数据可以看出接受问卷调查的人的学校和专业分布广泛，年调查人数约 3 万人，显然这是当年全国在校生的一个随机抽样的一个子样，符合统计学的抽样要求．

② 表二中的“A 出版社在你心目中的位置“只是反映出用户对 A 出版社的整体印象，并没有和其他的出版社作比较，不能说明出版社在整个市场中竞争力．故不予以考虑．

③ 表二中的“版次、版次月、印张、定价“重点在版次、印张、定价上，由它可以得出当年该出版社单位印张（大学课本每印张 16 页）定价及每页定价，我们在强势产品因素满意度指标的计算要用到．

④ 表二中的“新旧书与教材获得方式”可能影响某一门课程类书的销量，因为用户使用旧书，或从高年级同学那里购买旧书会压缩该门课程类书的销量．但是从表中数据来看，使用旧书与从老师复印的教材或讲义的概率很小，可以暂不考虑，有关它的影响我们在模型的进一步分析中将谈到．

⑤ 表二中“对该书的满意度评价”反映了该书在市场上的未来竞争力，是影响强势产品指标的关键数据．我们将其每一个用户的四项满意度评价计算平均，进而分析出对每一门课程类书的满意度指标．为后期确定强势产品做准备．

⑥ 表二中的“课程类型 A”分为必选与选修．显然必修课程的教材较选修课程的教材在市场上有更大的用户，“课程类型 B”分为公共基础课、专业基础课与专业课，由于公共基础课的用户人数要大于专业基础课的用户人数，专业基础课的用户人数大于专业课的用户人数．用户越多，影响力越大．尽管如此，但由于学生这个消费群使用相应教材的随机波动性小，所占比率也相对较小，在这些类型的统计数据中，均有一种类型的比率占 95%以上，因此，课程分类对满意度指标等指标的微调作用较小．

⑦ 表二中的“使用册数”，鉴于 2001—2005 年间，用户绝大部分只使用 1 册，而且表二的调查的样本空间大到几万，从概率角度讲这是小概率事件，因此不加考虑．

⑧ 表二中的“教材名”用于归类.

⑨ 表二中的“填写年级，填写学期”反映的是使用教材的学生的结构（新生还是老生），而前面我们考虑课程类型 A，B 时，其中实际上已经涵盖了使用教材的学生的结构情况，即专业课是高年级的课程，基础课是低年级的课程．因此我们不再对加考虑.

⑩ 表三、四数据分析：由表三，表四可以算出以前年份单位书号的销售量.

⑪ 表五数据分析：表五数据用于人力资源的约束.

（2）长期效益的体现：强势产品.

在考虑资源（书号）分配的时候，总社一般以增加强势产品支持力度的原则优化资源配置．如果总社只看重短期利益，就没有必要区分强势产品与非强势产品：为了支持强势产品的发展而削减一些非强势产品的书号配额，反而有可能减少当年的销售利润，可见强势产品并不属于短期利益偏好者的考虑要素．相反，强势产品在延长消费连贯性、持续提升出版能力、拓展市场等方面有不可取代的重要性．强势产品代表了可持续发展，强势产品原则上代表了总社对长期利益的兼顾.

鉴于此，我们用 3.2.2 中的五项反映出版社可持续发展的要素定义强势产品，既只有在满意度、市场占有率增长速度、单位书号销售量增长速度、计划可信度以及单位印张价格这五方面的综合指标中得到较高评价的出版物才是强势产品．总社对于强势产品给予较大的支持力度，获得总社支持的强势产品则更快地实现上述五个指标的优化，成为更加强势的产品，获得总社更大的支持，这种良性循环的现象也会激励出版社的各个分社努力提高自身综合素质，共同实现出版社的可持续发展．我们用 $\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}*(\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_{ij},\lambda_{ij},\mu_{ij})$ 表示这种良性循环，用 $\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}*(\alpha_{ij},\beta_{ij},\gamma_{ij},\lambda_{ij},\mu_{ij})$ 表示由这种良性循环所带动的可持续发展．长期利益最大化体现在可持续发展上（后称可持续发展强势）.

目标函数为：$\max Q_1=\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}*\alpha_{ij}$，$\max Q_2=\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}*\beta_{ij}$，$\max Q_3=\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}*\gamma_{ij}$，

$$\max Q_4=\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}*\lambda_{ij}，\quad \min Q_5=\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}*\mu_{ij} \tag{3}$$

式中，Q_1 为满意度，Q_2 为市场占有率增长速度，Q_3 为单位书号销售量增长速度，Q_4 为计划可信度，Q_5 为单位印张价格.

这是一个多目标规划问题．用专家系统法、层次分析法和经典“归一化”法，给予其权值，都能将它转化成为单目标规划问题．在这里我们用“归一化”法处理，首先将目标函数值归一化，以 $Q_1(x)$ 为例：

令 $M^*=\max Q_1(x)$，$m^*=\min R_1(x)$，设 $Q_1(x)$归一化后为 $\overline{Q_1(x)}=\dfrac{Q_1(x)-m^*}{M^*-m^*}$，显然归一化后有 $\overline{Q_1(x)}\in[0,1]$.

同理，可求 $\overline{Q_2(x)}$，$\overline{Q_3(x)}$，$\overline{Q_4(x)}$，$\overline{Q_5(x)}$．所以强势产品指标最大化模型便可表示成

目标函数： $\max \overline{R_2(x)} = \lambda_1 \overline{Q_1(x)} + \lambda_2 \overline{Q_2(x)} + \lambda_3 \overline{Q_3(x)} + \lambda_4 \overline{Q_4(x)} - \lambda_5 \overline{Q_5(x)}$ （4）

通常， $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \dfrac{1}{5}$.

（3）预测.

总社领导在 2006 年分配书号时考虑长期利益，需要预测 2006 年可持续发展强势的五个要素.

根据 3.2.2 中提供的公式计算出五个要素在 2001—2005 五年期间在各门课程上的体现，得到 5 个 5 × 72 阶矩阵，预测 2006 年的情况（具体实现同 3.2.2），计算结果见附录一.

3.2.3 权益模型

（1）目标函数.

权益模型反映总社领导对利润最大化与可持续发展强势最大化的偏好，所以赋予这两个目标权值：

$$R = w_1 \times R_1 + w_2 \times R_2 \tag{5}$$

式中，w_1，w_2 分别表示短期效益与长期效益的权重.

（2）约束条件.

一般情况下，书号越多，出版物的销售量越大. 出版社和各个分社都希望得到尽可能多的书号. 但是 A 出版社总共只有 500 个书号（由附件 4 得），即 $\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = 500$；另外，分社所得的书号不会低于申请数量的 $\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{1}{2}x'_{2006i} \leqslant x_{2006i} \leqslant x'_{2006i}$；各门课程分得的书号数目不能使其印制的书量超过市场容量，用该书市场占有率和 2006 年该书预测销量来描述，即 $x_{ij} \times y_{ij} \leqslant z_{ij} \times \dfrac{1}{\rho_{ij}}$.

由于各个分社人力资源有限，不能完成超过其人力资源负荷的书号数目. 每个分社都有若干策划、编辑和校对人员，分社得到的书号数目不会超过这三类人员负荷的最低值，即 $x_{ij} \leqslant \min(A_i \times a_i, B_i \times b_i, C_i \times c_i)$；模型如下：

$$\max R = w_1 \times R_1 + w_2 \times R_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = 500 \\ \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} \geqslant \dfrac{X_i}{2}, \quad (i = 1, 2, \cdots, 9) \\ x_{ij} \times y_{ij} \leqslant z_{ij} \times \dfrac{1}{\rho_{ij}} \\ x_{ij} \leqslant \min(A_i \times a_i, B_i \times b_i, C_i \times c_i) \\ x_{ij}，\ x_i \text{ 为整数} \end{cases} \tag{6}$$

3.3　微调模型（模型 2）

3.3.1　分社的二级决策

在模型 1 中，总社领导权益经济利益与可持续发展战略之后，得出了具体的书号分配方案，并下达到各个分社，由分社在重新对学科所属每个课程做出出版计划，并付诸实施.

如果分社完全认同总社的方案，则严格按照模型 1 得出的方案实施；如果在分社提交申请书号的计划书后，实际情况有变动，或者分社更看重自身经济利益最大化，则会对总社下达的方案做出微调，其方法与模型 1 相同.

现仅以第一分社（计算机类）为了完全实现自身利益最大化而做出微调为例，说明微调模型.

3.3.2　模型建立（以第一分社为例）

第一分社里共有 10 门课程，该分社在只考虑利润最大化的前提下将自己拥有的书号分配给这 10 门课程.

$$\text{目标函数：}\max Q_1' = \sum_{j=1}^{10} x_j \times y_j \times s_j \times r \tag{7}$$

由于各门课程依附于分社，不设专门的人力资源，所以不考虑由书号过多引起的人力资源超负荷的问题.

$$\text{约束条件：}\begin{cases} \sum_{j=1}^{10} x_j \leqslant x_i, & (i=1) \\ x_{ij} \times y_{ij} \leqslant z_{ij} \times \dfrac{1}{\rho_{ij}}, & (i=1) \end{cases} \tag{8}$$

其他约束条件同 3.2.3.

4　模型的求解与分析

4.1　模型的求解

根据模型 1，运用 Matlab 与 Lingo 软件编程进行运算，获得表 2、表 3 及附录中部分数据，程序见附录二.

表 2　2006 年 A 出版社各分社所分得的实际书号个数

计算机	经管	数学	英语	两课	机能	化学	地理	环境
62	34	111	76	36	38	43	49	51

表 3　2006 年各门课程所分得的实际书号个数

1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	0	6	5	17	3	3	4	4

续表 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
15	4	3	2	0	4	4	7	3
19	20	21	22	23	24	25	26	27
2	5	12	14	2	12	11	6	23
28	29	30	31	32	33	34	35	36
11	14	6	5	7	2	10	9	14
37	38	39	40	41	42	43	44	45
17	3	4	5	4	3	2	4	1
46	47	48	49	50	51	52	53	54
3	6	13	8	5	5	7	6	7
55	56	57	58	59	60	61	62	63
5	5	8	6	9	10	12	9	8
64	65	66	67	68	69	70	71	72
7	9	4	7	11	9	10	8	6

注：表 3 中，奇数行为各门课程的编号，偶数行为其所对应的书号个数.

4.2 模型的分析、检验

对于模型(6)中的 w_1 和 w_2 的不同赋值，显示了出版社对各项指标的重视程度；当 $w_1=1$，$w_2=0$ 时，表示该出版社对书号的分配只考虑了最大利益；当 $w_1=0$，$w_2=1$ 时，表示该出版社对书号的分配只考虑了长远发展而忽视当前经济效益．若对于 R_2 中的几个权值赋不同的值时，则反应了对长远发展规划的几个属性的重视程度，比如：若令 λ_2 到 λ_5 都为 0，则表示出版社只关注了经济效益和满意度指标．这正检验了我们模型的全面性，而对其他参数的检验，我们利用表中的数据进行了相应的验证，结果吻合度较高．

5 模型的评价、改进

5.1 模型的优点

（1）对出版社二级分配体制理解透彻．

我们认为总社领导在考虑出版社利润最大化的同时兼顾出版社的可持续经营，并引入可持续发展强度的概念描述这种偏好；而分社对出版社整体的责任心没有分社领导强，仅考虑分社的利润最大化．同时，我们还提供了分社完全服从总社安排的可能，完善了模型．

（2）对附件数据挖掘充分．

在附件 2 的调查报告中，我们利用问卷常识和小概率事件等方法甄别出最能反映可持续

发展强势的要素；对附件 3，4，5 中关于出版社资源配置信息的客观、准确、全面的数据，我们做到“数”尽其用，运用了一种性方法进行预测，得到了较好的结果，合理描述了各项出版社资源配置的指标.

（3）采用归一化思想的优点可以提高精度、减少误差且全面地解释了附件 2 中的各因素.

（4）本文模型的建立与实际紧密联系，充分考虑现实情况的多样性，从而使模型更贴近实际.

（5）由于统计资料不够全面，我们设计最优方案时，各个因素的确定有一定的偏差.

5.2 模型的缺点

模型的缺点就是长期分析中人力资源因素的缺失.

在分析 3.2.2 中的长期利益模型时，由于题目数据的缺失，我们没有考虑在可持续发展战略中人力资源的权重. 在知识经济时代，具有知识经济发展所具备相应知识的人才，成为比原材料、资本等更重要的因素. 出版业作为知识经济的一个重要产业，其从业人员的素质，直接影响着出版业的可持续发展.

5.3 模型改进

模型改进，即注重成本构成的优化模型.

我们在处理 A 出版社的成本时，设定常数 r，考虑到 A 出版社的所有教材的具有同一利润率，即附件 5 的 9 个分社人力资源细目表，计算出策划成本、编辑成本、生产成本、库存成本、销售成本、财务与管理等成本已经融入进 r 中. 现在将这些成本分离出来具体地分析其构成：

假设 $a_1(x)$ 为策划人员人数，b_1 为策划人员平均工资 $a_2(x)$：为编辑人员人数，b_2 为编辑人员的平均工资；$a_3(x)$ 为校对人员人数，b_3 为校对人员的平均工资；$t_1(x)$ 为策划所需费用，$t_2(x)$ 为编辑所需费用，$t_3(x)$ 为校对所需费用，则出版社工作人员消耗的费用为 $y_1(x)$，$d(x)$为印张数.

目标函数：$R(x)=S(x)-F(x)$

$$\begin{cases} t_1(x)=a_1(x)\times b_1 \\ t_2(x)=a_2(x)\times b_2 \\ t_3(x)=a_3(x)\times b_3 \end{cases} \tag{9}$$

可以得到：

$$\left.\begin{aligned} y_1(x)&=t_1(x)+t_2(x)+t_3(x) \\ y_2(x)&=d(x)\times h_1 \\ y_3(x)&=d(x)\times h_2 \\ y_4(x)&=d(x)\times h_3 \\ y_5(x)&=d(x)\times h_4 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中，h_1 为单印张生产成本，h_2 为单印张库存平均成本，h_3 为单印张平均销售成本，h_4 为单印张平均财务与管理成本.

令 $y(x)=y_1(x)+y_2(x)+y_3(x)+y_4(x)+y_5(x)$ 为 A 出版社的总成本. 结合模型 1 的优化模型建立起注重成本构成的优化模型如下：

目标函数：　　$\max R(x)=\lambda_1 R_1(x)+\lambda_2 R_2(x)$

$$
\text{s.t.}\quad \begin{cases} R_1(x)=\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} * q_{ij} * c_{ij} - y(x) \\ R_2(x)=\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{n_i} w_{ij} * x_{ij} \\ y(x)=y_1(x)+y_2(x)+y_3(x)+y_4(x)+y_5(x) \end{cases} \tag{11}
$$

其中，w_{ij}表示用户对第i个分社第j门课程的满意度指标，λ_1，λ_2分别表示利润与满意度的权重系数，q_{ij}表示当年第i个分社第j门课程的单个书号的平均实际销（$i=1,2,\cdots,9$，$j=1,2,\cdots,n_i$）.

6　模型的推广

模型 1 比较全面地考虑了多种因素对目标函数的影响，有较成熟的理论，其解题思想可以用于解决各种复杂问题．本文建立的模型解决了单个因素到多个因数的资源配置问题，采用分层次解决问题的方法，通用性、推广性强．在整个建模过程中，我们始终根据对书号的“合理”要求，寻求最好经济效益．

7　给出版社的建议

当前，我国教育改革和出版改革一日千里，资源的整合、市场化的运作把教育出版推到了改革的浪尖．摆在教育出版社面前的主要有两大难题：一是在激烈的市场竞争中，如何走出“发行折扣低、出版利润少、图书定价高”的恶性循环；二是如何权衡书号、人力、资金、设备等资源，使之以一种更有效的组合形式引导出版社生产经营的可持续发展．

对于难题一，我们认为恶性循环的源头是发行折扣低．而造成这种现象的原因就是所发行的出版物没有市场优势，没有发行强势，流于平庸，这类同质商品在市场上替代品太多，最容易陷入低价恶性竞争中．建议：

（1）综合考虑出版物的满意度、市场占有率增长速度、单位书号销售量增长速度、计划可信度和单位印张成本等强势产品要素，确定有优势的强势产品，这类产品有着较强的市场统治力和广泛的消费群体，同质出版物的相对竞争力较弱，出版社掌握着出版主动权，不会陷入恶性循环．

（2）在出版前完善强势产品培育，做好购买人群、与同质产品的比较等重要指标的调查，不要贸然出版，将尚未成熟的产品投入市场，或不经过强势产品培育，盲目跟风出版．

对于难题二，我们认为鉴于书号资源在出版社资源中的核心地位，出版社的难题不是确定哪个是核心，而是确定以怎样的方式统筹规划其他资源为核心资源的配置服务．可以首先计算出各门课程（分社）占有非核心资源的综合评价，然后将这个综合评价与利润最大化目标（也可以理解为各个分社的盈利能力）相结合，作为书号分配的量化依据．这种权衡各种资源的方法充分肯定了利润最大化对于出版社的重要性，同时兼顾那些维持可持续发展的资源，坚持走可持续经营路线．

无论是摆脱恶性循环还是权衡资源配置，对市场信息的准确把握都是出版社可持续发展的必要条件．在调查市场信息的时候，不仅要注意调查指标要符合调查目的，数据设计要方便统计，还要注意在调查范围的选取上尽量遍及销售区域，在数据统计之后要注意排除政策环境和经济环境的影响，不要为环境温良而掩饰衰退，也不要为环境恶劣而否定既得成果．

根据本模型的讨论结果，我们向出版社提供的建议是：以强势产品为主，特色、传统产品为辅，书号分配为核心任务，精练市场信息，坚持走可持续经营路线．

参 考 文 献

[1] 张宏．Excel 数据处理与分析．北京：电子工业出版社，2005

[2] 姜启源．数学模型（第三版）．北京：高等教育出版社，2003

[3] 刁明碧．理论统计学．北京：中国科学技术出版社，1998

[4] 韩中庚．数学建模方法及其统计．北京：高等教育出版社，2005

[5] 韩伯棠．管理运筹学．北京：高等教育出版社，2000

[6] 张家琦．决策分析．北京：首都师范大学出版社，1998

[7] 苏金明．Matlab7.0 实用指南．北京：电子工业出版社，2004

[8] 赵静，但琦．数学建模与数学实验．北京：科学出版社，2000

[9] 靖新．概率论与数理统计．大连：大连理工大学出版社，2005

出版社资源配置模型

唐开均　姚　进　李国平

【摘　要】本问题是出版社的资源配置问题．其关键是如何分配 A 出版社 2006 年各分社的书号数，使得利润率最大．我们首先依据附件 1～附件 5 所提供的数据，应用回归分析、移动平均法、指数平滑法对 A 出版社 2006 年的销售量进行预测；然后建立了两个线性规划模型．在模型 1 中，在没有考虑满意度的情况下，运用了 Matlab 7.0 和 Lingo 8.0 两个应用软件对模型进行编程，得到了模型 1 的结果：55，57，120，59，111，38，20，20，20．在模型 2 中，在考虑满意度的情况下对模型 1 进行修正，同时运用上述两软件编程得到了模型 2 的结果：55，71，120，59，45，38，20，20，72；最后还对模型进行了改进与推广．

本模型设计中充分考虑题设条件，在合理假设下简化模型，设计的模型具有简单、实用、易推广、适应范围广的特点．

【关键字】利润率　满意度　回归　线性规划　移动平均法　指数平滑法

1　问题重述

市场经济的发展为出版事业的繁荣开辟了一条崭新的道路，创造了极好的机遇并提供了强大的动力．近年来，我国出版社信息化建设步伐进一步加快，目前，几乎所有的出版社在财务管理、发行管理方面都实现了计算机管理．但是，从资源配置的角度，对出版社所有业务进行信息化管理，成功的案例非常少．出版社需要根据本社的资源情况，包括人力资源、生产资源、资金和管理资源等以及市场需求与竞争力分析，将一定数量的书号合理地分配给各个分社，使出版社得到最好的经济效益．各个分社在分配书号时至少保证分给各分社数量申请的一半．现考虑如下问题：

根据本问题附录中给出的 24 个出版社的一些数据资料，如何分配 A 出版社 2006 年各分社的书号数，提出 A 出版社的书号配置方案，使得 A 出版社获得最好的经济效益．

2　符号说明及基本假设

2.1　符号说明

m——第 m 年；$m=1, 2, \cdots, 5$（分别指 2001，2002，2003，2004，2005 年）；

n ——A 出版社有 n 类分社，即有 n 类学科（$n=1, 2, \cdots, 9$）；
s ——A 出版社的书号总量；
s_{mn} ——A 出版社第 m 年 n 类分社分得的书号数量；
A_n ——A 出版社 2006 年第 n 类学科申请的总书号数；
S_{mn} ——A 出版社第 m 年第 n 类学科实际总销售量；
c_n ——A 出版社 2006 年第 n 类学科的均价；
X_n ——A 出版社 2006 年第 n 类学科分配的书号数；
P ——A 出版社 2006 年的经济效益；
y_{6n} ——A 出版社 2006 年第 n 类学科书本的总销售量；
α ——A 出版社每一类学科教材的利润率；
S_i ——A 出版社 2006 年第 i 门课程预测销售量；
H —— 每类学科分社的满意度权向量.

2.2 基本假设

（1）顾客对该分社的满意度只对下一年的分配比例有影响；
（2）不考虑新的人力资源计划；
（3）假设同一课程不同数目价格差别不大，同时销售量相近；
（4）出版社在定价时保持对所有教材利润率同一；
（5）忽略教材的出版年月对销售的影响.

3 模型的分析、建立与求解

3.1 线性规划约束条件的分析与建立

我们先根据附件 4 所提供的 2001—2005 年各分社实际分得的书号数等于各门课程实际分得的书号数之和，可获得 A 出版社 2001 年各类学科的书号总量：

$$s_{11}=64,\quad s_{12}=37,\quad s_{13}=147,\quad s_{14}=95,\quad s_{15}=44$$
$$s_{16}=40,\quad s_{17}=24,\quad s_{18}=22,\quad s_{19}=27$$

所以 2001 年书号总量为

$$\sum_{n=1}^{9} s_{1n}=500$$

同理可求得 2002—2005 年每一年的书号总量：

$$\sum_{n=1}^{9} s_{2n}=\sum_{n=1}^{9} s_{3n}=\sum_{n=1}^{9} s_{4n}=\sum_{n=1}^{9} s_{5n}=500$$

因此，A 出版社 2002—2005 年每一年的书号总量是一定的，均为 500. 由此，可推断 2006 年需要分配的书号总量也为 500，可表示为

$$\sum_{n=1}^{9} X_n=500 \tag{1}$$

我们由附件 5 所提供的分社人力资源细目知，第 n 类分社所能完成的书号个数不大于该社人力资源总数，即各个分社实际分得的书号数小于等于三类工作人员（策划人员、编辑人员、校对人员）的最小工作量．这里涉及一个工作量问题，在一类学科（分社）中，人员的分工不同，工作能力也是不一样的．工作能力指每人每年最多能够完成的书号个数；工作量即分社中每一类员工的数量与该类员工的平均工作能力的乘积（见表 1）．

表 1　最小工作量统计表

	计算机	经管	数学	英语	两课	机械能源	化学、化工	地理、地质	环境
最小工作量 M_n	38×3	38×3	40×3	34×3	37×3	24×3	22×2	21×3	24×3

所以得到一个约束领域：

$$X_n \leqslant M_n \tag{2}$$

为保持工作连续性和对各分社计划一定程度的认可，出版社在分配书号时至少保证分给各分社数量申请的一半．表 2 为每一类学科分配的总书号数：

表 2

	计算机	经管	数学	英语	两课	机械能源	化学、化工	地理、地质	环境
A_n	110	66	222	118	72	76	40	40	40

因此有

$$X_n \geqslant \frac{1}{2} \times A_n \tag{3}$$

3.2　销售量预测模型的建立

3.2.1　参数估计的回归预测

我们根据附件 3、附件 4 提供的数据，对 2001—2005 年内各学科的实际销售量和总社分配给每一学科的书号总量进行统计，建立预测回归模型，预测 2006 年各类学科销售总量．由附件 3，对 2001—2005 年各类学科的书号总量 s_{mn} 的分配情况如表 3 所示．

表 3　A 出版社 2001—2005 年分配的书号数量

学科名称	2001	2002	2003	2004	2005
计算机类	64	69	77	69	73
经管类	37	39	43	39	41
数学类	147	148	153	150	146
英语类	95	87	77	83	85
两课类	44	48	42	50	44
机械能源类	40	42	40	38	39
化学化工类	24	25	20	17	19
地质地理类	22	21	23	27	27
环境类	27	21	25	27	26

由附件 4，对 2001—2005 年各类学科的实际销售总量 s_{mn} 的统计如表 4 所示.

表 4　2001—2005 年各类学科的实际销售总量统计表

学科名称	2001	2002	2003	2004	2005
计算机类	9 843	10 292	13 363	16 749	20 636
经管类	18 752	19 605	26 449	33 899	39 716
数学类	194 518	202 077	238 052	309 841	390 024
英语类	14 490	16 082	19 488	25 961	33 515
两课类	99 522	115 423	137 233	180 784	216 924
机械能源类	10 714	12 548	15 754	19 020	25 977
化学化工类	3 655	3 985	5 073	6 564	8 409
地质地理类	7 054	8 055	9 823	11 715	15 434
环境类	5 541	6 322	7 313	9 825	13 934

首先，我们利用表 3、表 4 的数据分析每年各类学科的实际销售总量 S_{mn} 与各类学科的书号总量 s_{mn} 的比值 y_{mn} 为纵坐标，年数 m 为横坐标，将这些数据点在平面直角坐标系上标出（散点图（见图 1)，程序见附录 1).

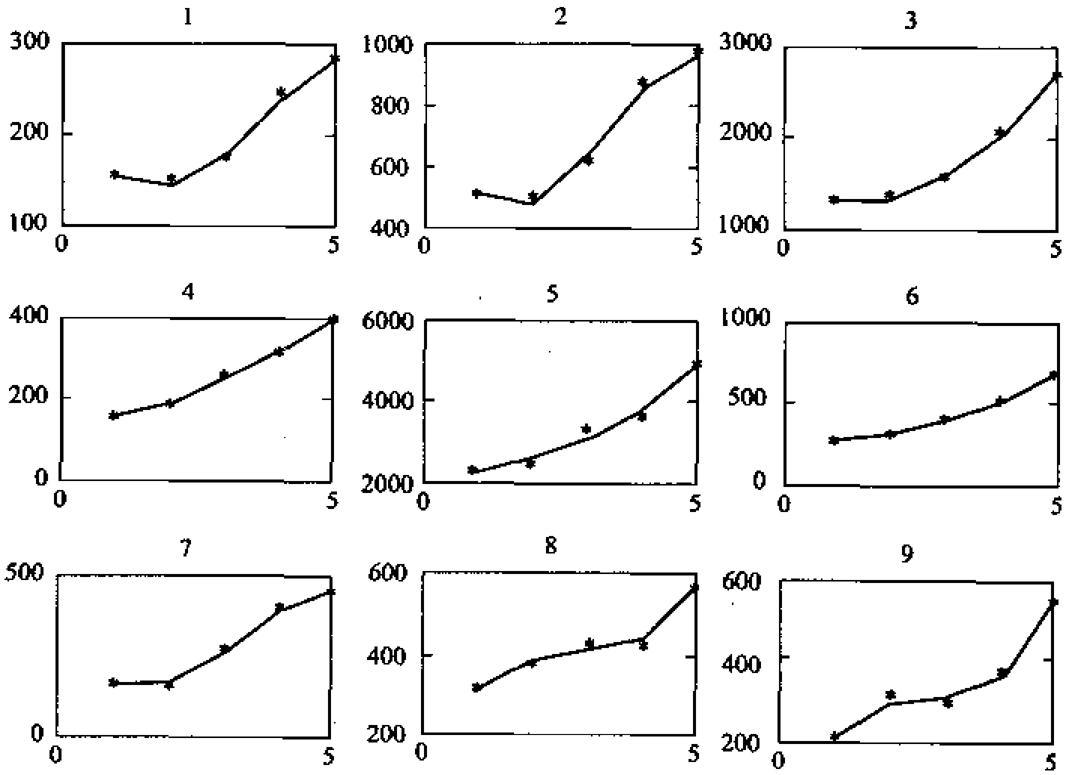


图 1

由图 1 看到，数据点不落在一条直线附近，这说明 m 与 y_{mn} 之间的关系不能被近似看做是简单的直线关系，即 m 与 y_{mn} 之间的关系不是确定性关系. 事实上，实际销售总量 S_{mn} 与各类学科的书号总量 s_{mn} 的比值 y_{mn} 除了与年数 m 有一定关系外，还受其他因素的影响. 为了减少误差，我们用回归分析给予模拟，并采用三维模拟进行拟合，因此可以建立如下关于 y_{mn} 与 m 的一元三次函数回归模型：

$$y_{mn}=\beta_0+\beta_1\times m+\beta_2\times m^2+\beta_3\times m^3+\varepsilon \tag{4}$$

其中，β_0，β_1，β_2，β_3是四个未知参数，为回归系数．对于不同类别的学科有不同的β_0，β_1，β_2，β_3，ε为其他随机因素对y_{mn}的影响，m是非随机的可精确观察的回归变量，ε是均匀值为0的随机变量，是不可观察的．从而用上述已知的实验y_{mn}值对β_0，β_1，β_2，β_3作估计，并对其作假设，且求出在$m=6$处对y_{6n}作出预测．

3.2.2　模型的求解

我们直接运用数学软件 Matlab7.0 进行编程求解，其中，输入的j为模型中y_{mn}的数据，m为对应于回归系数$\beta=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$的数据矩阵；输出的$z$为$\beta$的估计值，常记作$\hat{\beta}$，参数估计值见表 5（程序及结果见附录 1）．

表 5

学　科	参 数 估 计			
	β_0	β_1	β_2	β_3
计算机类	243.545 4	−136.882 3	53.273 1	−4.859 9
经管类	859.486 7	−553.773 2	228.286 9	−22.596 1
数学类	1 573.8	−383.1	142.5	−4.4
英语类	140.717 5	−5.074 5	16.989 1	−1.174 8
两课类	1 901.4	355.1	−54	20.5
机械能源类	273.803 0	−30.976 2	24.038 3	−0.441 8
化学化工类	333.489 0	−298.101	132.141 3	−13.595 7
地理地质类	107.618 7	302.550 4	−104.704 6	12.529 9
环境类	−48.421 1	376.063 8	−137.169 9	17.084 9

表 5 的回归系数给出了模型中β_0，β_1，β_2，β_3的估计值，且每一类学科的参数不同．将回归系数的估计值代入模型，即可预测 A 出版社 2006 年每一个学科的销售总量y_{6n}，预测值记作$\hat{y}_{6n}$，可得到模型的预测方程

$$\hat{y}_{6n}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1m+\hat{\beta}_2m^2+\hat{\beta}_3m^3 \tag{5}$$

只需根据年份就可以预测 2006 年的销售量．现利用 Matlab7.0 进行编程（程序见附录 1），预测到每一类学科中单个书号的销售量，即该类学科书号的平均销售量，结果如表 6 所示．

表 6

学科	计算机	经管类	数学类	英语类	两课类	机械能源	化工化学	地理地质	环境类
$\hat{y}_{6n}$	291.2	874.4	3 454.8	468.1	6 516.0	857.9	361.0	860.0	960.2

3.3　n 类均价的确定

由上一个模型，我们预测出 2006 年各类学科书号的平均销售量，即可计算每一门课程的销售量．现关键是找出各类学科中每一门课程均价的确定．对计算机类学科进行分析，同理按上面回归分析，预测出 2006 年该类学科每门课程的销售量（见表 7）（其运行程序见附录 2）：

表 7

计算机类	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总销售量
	1 480	3 490	310	1 770	370	4 190	5 430	630	3 960	2 920	24 550

通过对上面所求数据的分析，我们可定义

$$T=\text{各课程销售量}/\text{总销售量}$$

来确定每门课程在所属类别占的权重 w_n，则

$$w_1=(1\,480,3\,490,310,\ 1\,770,370,4\,190,5\,430,630,\ 3\,960,\ 2\,920)\times\frac{1}{24\,550}$$

即

$$w_1=(0.060\,3,0.142\,2,0.012\,6,0.072\,1,0.015\,1,0.170\,7,0.221\,2,0.025\,7,0.161\,3,0.118\,9)$$

又因为学科内每课程的均价为

$$\mu_1=(25.80,\ 25.50,\ 28.00,\ 26.00,\ 24.70,\ 25.60,\ 27.00,\ 22.90,\ 25.90,\ 24.50)$$

那么计算机类学科每门课程的总均价为

$$c_1=0.060\,3\times25.80+0.142\,2\times25.50+\cdots+0.118\,9\times24.50=25.802$$

同理可获得其他 8 类学科中的课程占所属类别的权重和总均价：

$w_2=(0.130\,0,\ 0.087\,0,\ 0.011\,5,\ 0.077\,1,\ 0.023\,5,\ 0.061\,0,\ 0.123\,3,\ 0.084\,5,\ 0.240\,0,\ 0.161\,9)$

$c_2=29.438\,81$

$w_3=(0.012\,2,\ 0.034\,1,\ 0.693\,8,\ 0.019\,1,\ 0.027\,7,\ 0.160\,2,\ 0.007\,9,\ 0.003\,3,\ 0.009\,8,\ 0.031\,8)$

$c_3=23.985\,7$

$w_4=(0.462\,6,0.044\,0,0.039\,9,0.070\,60,\ 0.076\,60,\ 0.102\,00,\ 0.007\,1,0.097\,7,\ 0.074\,1,\ 0.025\,2)$

$c_4=29.555\,08$

$w_5=(0.041\,4,\ 0.160\,9,\ 0.122\,5,\ 0.148\,2,\ 0.168\,9,\ 0.188\,9,\ 0.105\,9,\ 0.047\,8)$

$c_5=17.423\,26$

$w_6=(0.344\,3,\ 0.029\,8,\ 0.113\,2,0.294\,5,\ 0.087\,6,0.130\,6)$

$c_6=24.053\,84$

$w_7=(0.210\,5,\ 0.261\,9,\ 0.140\,6,\ 0.004\,9,\ 0.076\,63,\ 0.305\,5)$

$c_7=23.739\,55$

$w_8=(0.066\,8,\ 0.209\,0,\ 0.206\,2,\ 0.224\,4,\ 0.062\,5,\ 0.231\,1)$

$c_8=26.481\,2$

$w_9=(0.186\,0,\ 0.131\,4,\ 0.264\,7,\ 0.170\,0,\ 0.092\,3,\ 0.155\,6)$

$c_9=26.475\,08$

3.4　线性规划的最优化模型（模型 1）

为使出版社产生最好的经济效益，可设 α 为每一类学科的利润率（由附件 4 知道，该出

版社在定价时保持对所有教材的利润率同一）. 通过上述预测设 A 出版社 2006 年第 n 类学科书本的总销售量 y_{6n} 以及总均价 c_n，书号总数 X_n，所以教材产生的经济效益的目标函数为

$$P=\sum_{n=1}^{9}X_n y_{6n} c_n \alpha$$

综合以上几个模型的回归分析，得到一个综合性的线性规划模型：

$$\max \quad P=\sum_{n=1}^{9}X_n y_{6n} c_n \alpha \tag{6}$$

$$\text{s.t} \begin{cases} \sum_{n=1}^{9}X_n = 500 \\ X_n \leqslant M_n \\ X_n \geqslant \frac{1}{2}\times A_n \end{cases} \tag{7}$$

至此，已经计算出 2006 年各类学科的总均价. 出版社的经济效益与书号数、均价、总销售量、教材的利润率有关，即我们建立的目标函数. 将已知的数据代入目标函数，通过约束条件的建立，运用编程工具 Lingo8.0 进行编程，预测 2006 年书号的最优分配，结果见表 8：（程序见附录 3）

表 8

学科	计算机类	经管类	数学类	英语类	两课类	机械能源	化工化学	地理地质	环境类
书号数	55	57	120	59	111	38	20	20	20

3.5 模型 2（考虑满意度，对模型 1 进行修正）

现代营销理论的核心是创造顾客价值和顾客满意. 顾客是企业生命之所在，为顾客提供优质服务的直接目的是吸引新用户，产生业务收入，而更深层次的目的则是留住老顾客并提高他们的忠诚度. 由此，企业得以实现成本最小化、收入最大化和利润最大化.

要提高顾客忠诚度，需要首先了解顾客对现有服务的满意度，并从中找出差距，进一步提高顾客满意度水平. 完整的顾客满意度指标体系包括测评的指标，以及根据各项指标在测评指标体系中所具有的不同的重要性程度确定各项指标对总体满意度的影响权重. 不同的加权数往往导致不同的测评结果，因此权重确定是测评指标体系设计中非常关键的一个步骤，它对于能否客观、真实地反映顾客满意度起着至关重要的作用.

通过附件2，对2005年各项指标满意度的列表，确定各项指标对总体满意度的影响权重. 我们利用层次分析法的思想来进行学科类的选择. 现已经在计算机类、经管类、数学类、英语类、两课类、机械能源类、化工化学类、地理地质类、环境类这 9 门学科中作出选择. 这个问题可以分为三个层次，最上层为目标层，即对每类学科的满意度；最下层为方案层，即选择哪一类学科；中间层为准则层，不同的人可取不同的准则，在这里是取教材内容新颖、学科前沿性、教材的作者在其领域的权威性、教材质量和排版、教材价格这四个准则. 层次结构如图 2 所示.

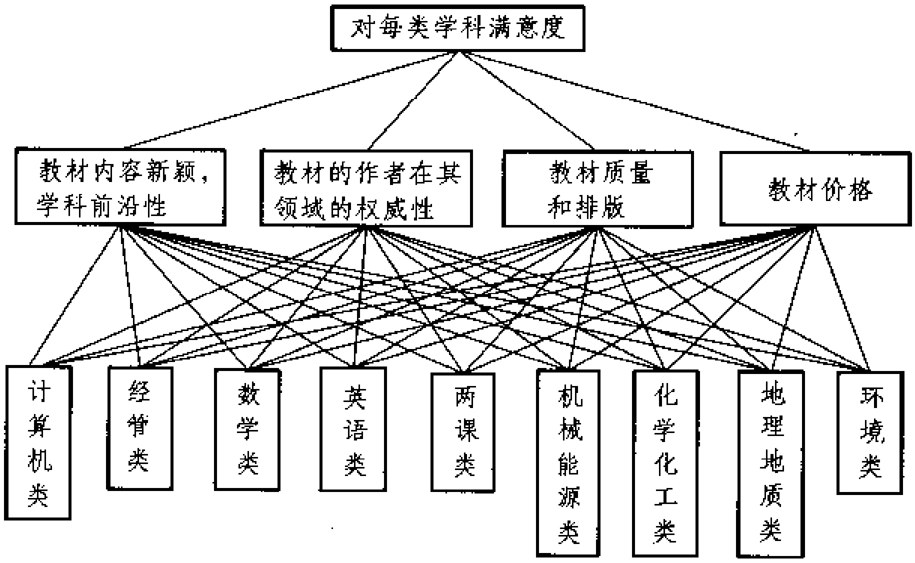


图 2

可以构造成对比较矩阵，计算相应的最大特征根、特征向量，并进行一致性检验．准则层对目标层的成对比较矩阵如表 9 所示：

表 9

对于目标层	C_1	C_2	C_3	C_4	W
C_1	1	3	5	2	0.383 3
C_2	1/3	1	2	1/2	0.193 7
C_3	1/5	1/2	1	1/3	0.170 9
C_4	1/2	2	3	1	0.252 1

求得的最大特征值$\lambda = 4.083\ 6$，一致性指标 CR = 0.031 0.

同理根据所统计的数据可得方案层对准则层的成对比较矩阵，如表 10，11，12，13 所示，并用 Matlab7.0 分别求出权项量以及一致性指标检验（见附录 4）.

表 10 成对比较矩阵表

1	1/2	1/2	1/3	1/4	2	1/4	1/2	1/3	0.075 9
2	1	1/2	1/2	1/3	3	1/3	2	1/3	0.091 1
2	2	1	1/2	1/3	3	1/3	2	2	0.106 9
3	2	2	1	1/2	3	1/2	2	1/2	0.110 6
4	3	3	2	1	4	1/2	3	2	0.158 8
1/2	1/3	1/3	1/3	1/4	1	1/5	1/2	1/3	0.071 6
4	3	3	2	2	5	1	4	2	0.180 0
2	1/2	1/2	1/2	1/3	2	1/4	1	1/3	0.080 9
3	3	1/2	2	1/2	3	1/2	3	1	0.124 3

求得的最大特征值$\lambda = 9.119\ 2$，一致性指标 CR = 0.010 3 < 0.1.

表 11　成对比较矩阵表

1	1/2	1/4	1/4	1/5	1/2	1/5	1/3	1/3	0.070 4
2	1	1/3	1/3	1/4	1/2	1/4	1/3	1/2	0.074 2
4	3	1	2	1/2	3	1/2	2	3	0.132
4	3	1/2	1	1/2	3	1/3	2	2	0.116 5
5	4	2	2	1	3	1/2	2	2	0.143 8
2	2	1/3	1/3	1/3	1	1/5	1/2	1/2	0.079 1
5	4	2	3	2	5	1	3	3	0.188 4
3	3	1/2	1/2	1/2	2	1/3	1	2	0.100 0
3	2	1/3	1/2	1/2	2	1/3	2	1	0.095 6

求得的最大特征值$\lambda = 9.130\ 6$，一致性指标 $CR = 0.011\ 3 < 0.1$.

表 12　成对比较矩阵表

1	1/4	1/4	1/2	1/2	1/2	1/3	1/5	1/5	0.072 1
4	1	2	3	3	2	2	1/2	1/2	0.129 1
4	1/2	1	3	2	2	2	1/2	1/2	0.114 0
2	1/3	1/3	1	1/2	1/2	1/3	1/5	1/4	0.076 1
2	1/3	1/2	2	1	1/2	1/2	1/4	1/3	0.080 7
2	1/2	1/2	2	2	1	1/2	1/3	1/3	0.086 6
3	1/2	1/2	3	2	2	1	1/3	1/3	0.102 1
5	2	2	5	4	3	3	1	2	0.184 3
5	2	2	4	3	3	2	1/2	1	0.154 8

求得的最大特征值$\lambda = 9.136\ 3$，一致性指标 $CR = 0.011\ 7 < 0.1$.

表 13　成对比较矩阵表

1	1/4	1/4	1/2	1/2	2	1/5	1/3	1/3	0.074 8
4	1	2	3	4	5	1/2	2	3	0.164 0
4	1/2	1	2	3	4	1/2	2	2	0.130 3
2	1/3	1/2	1	2	2	1/3	1/2	1/2	0.084 6
2	1/4	1/3	1/2	1	2	1/4	1/3	1/2	0.079 3
1/2	1/5	1/4	1/2	1/2	1	1/5	1/4	1/3	0.070 9
5	2	2	3	4	5	1	2	3	0.179 6
3	1/2	1/2	2	3	4	1/2	1	2	0.116 6
3	1/3	1/2	2	2	3	1/3	1/2	1	0.099 9

求得的最大特征值$\lambda = 9.154\ 6$，一致性指标 $CR = 0.013\ 3 < 0.1$.

最后，进行组合一致性和计算组合权项量：

$$CR = 0.0136 < 0.1$$

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}0.0759 & 0.0704 & 0.0721 & 0.0748\\ 0.0911 & 0.0742 & 0.1291 & 0.164\\ 0.1069 & 0.132 & 0.114 & 0.1303\\ 0.1106 & 0.1165 & 0.0761 & 0.0846\\ 0.1588 & 0.1438 & 0.0807 & 0.0793\\ 0.0716 & 0.0791 & 0.0866 & 0.0709\\ 0.18 & 0.1884 & 0.1021 & 0.1796\\ 0.0809 & 0.1 & 0.1843 & 0.1166\\ 0.1243 & 0.0956 & 0.1548 & 0.0999\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.3833\\ 0.1937\\ 0.1709\\ 0.2521\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.0739\\ 0.1127\\ 0.1189\\ 0.0993\\ 0.1225\\ 0.0754\\ 0.1682\\ 0.1113\\ 0.1178\end{pmatrix}$$

可见组合权向量通过了一致性检验，从而可以看出，不同学科类别的出版社的满意度存在着差异，且对 2006 年的销售量有一定影响．假设影响力度 $k = 10$，则

$$Y_{6n} = y_{6n} \times k \times H$$

进一步对其模型修正，可从模型 2 的结果中看出在两课类中分配到的书号为 111 个，与 2001—2005 年相比，具有明显上升趋势，且幅度较大．这数明了什么？同时看这类学科的销售量，我们会发现其总销售量远远超过其他学科的销售量，而其分配到的书号数却相对较低．影响他们的因素很多，但主要因素是两课类的课程大多数是公共课程，几乎所有专业年级都要学习，这样就比其他学科类有更大的销售量，从而销售量大书号少也就不足为奇．也正是这样我们就不得不对两课类的书号另外再作考虑．由题目中附页 3 可知，两课类 2001—2005 年的总书号的情况见表 14.

表 14

年　数	2001	2002	2003	2004	2005
书号数	44	48	42	50	44

现在我们要求 2006 年两课类的总书号，为此就要对其进行预测：为了使其相对准确，可以采用多种预测方法对其求证．

（1）用移动平均法对其预测：取其移动项数为 3，则可预测出 2004 年、2005 年、2006 年的书号数，如表 15 所示．

表 15

年　限	实际书号数	预测书号数	离　差
2001	44		
2002	48		
2003	42		
2004	50	45	5
2005	44	47	3
2006		45	

（2）应用指数平滑法：根据时间序列，设平滑系数为 β（$0 < \beta < 1$），取 $\beta = 0.9$，并依 2001

年、2002 年、2003 年 3 年的实际数的简单平均数作为 2002 年的预测书号，则 2003 年的预测书号为

$$\hat{Z}_{2003}=\beta\times Z_{2002}+(1-\beta)\times\hat{Z}_{2002}=0.9\times48+(1-0.9)\times44.667\approx47 \tag{8}$$

其余依次类推. 可得到如表 16 的预测值：

表 16

年　限	实际书号数	预测书号数	离　差
2001	44		
2002	48	45	3
2003	42	47	-5
2004	50	43	7
2005	44	49	-5
2006		45	

（3）运用回归分析：利用一元回归模型，设书号数 Z 与时间 t 的关系为

$$Z=\lambda t+a$$

则用 Matlab7.0（程序见附录 5）求出 λ 和 a 的值，分别为：0.2，45. 当 $t=6$ 时，$Z\approx46$.

综合上述三种预测方法的结果，可预测到 2006 两课类的书号数为 45，因此对模型的修正应为

$$\max\quad P=\sum_{n=1}^{9}x_nY_{6n}c_n\alpha$$

$$\text{s.t}\quad\begin{cases}\sum_{n=1}^{9}X_n=500\\ X_5=45\\ Y_{6n}=y_{6n}*k*H\\ X_n\leqslant M_n\\ X_n\geqslant\frac{1}{2}\times A_n\end{cases} \tag{9}$$

所以，经改进后，在原有程序（见附录 6）基础上稍做改动，就可得出 2006 年各学科分配的书号数（见表 17）.

表 17

学科	计算机类	经管类	数学类	英语类	两课类	机械能源	化工化学	地理地质	环境类
书号数	55	71	120	59	45	38	20	20	72

根据前面所求权重（即每门课程在所属类别占的权重 w_n）乘以各学科分配的书号数，该乘积为每课程的书号数，即进行 2 次分配，其分配程序见（附录 7）表 18.

表 18

学　科											总计
计算机类	3	8	1	4	1	9	12	1	9	7	55
经管类	9	6	2	5	2	4	9	6	17	11	71
数学类	1	4	83	2	3	19	1	2	1	4	120
英语类	27	3	2	4	5	6	1	6	4	1	59
两课类	2	7	6	6	8	9	5	2			45
机械能源	13	2	4	11	3	5					38
化工化学	2	5	3	2	2	6					20
地理地质	2	4	4	4	1	5					20
环境类	13	9	19	12	7	11					72

4　结果分析与检验

出版社必须经过充分的调查研究，集思广益，提出明确的全社管理思路和理念. 如果总社不能提出总体性的管理思路，各部门的业务需求就会围绕部门利益来设置，最终难以形成总体合力. 这其中的关键是预测确定合适的书号分配量.

建立线性规划模型预测出的结果与申请的书号量保持一致，没有太大的波动，仅两课类预测出的书号量与预测的书号量存在一定的偏差. 在此，我们又通过层次分析法考虑顾客的满意度以及采用多种方法预测两课类 2006 年的书号数，对模型进行修正. 单个对两课类进行多种预测方法考虑，预测的书号数 45 与申请的书号保持一致性，比较合理，减小了模型的误差. 综合分析，主要是因为两课类作为一门公共学科，各高校都要开设该课程，所以存在销售量以及书号数出现一定的偏差.

在进行模型修正的时候，环境类的书号数也存在着一定的偏差，这种偏差可能由于模型自身的不完善引起的.

另一方面，虽然在模型中总书号量是一定的，但可以更进一步来考虑总书号量的变化对其经济效益的影响，从而从宏观上获得书号与经济效益的关系. 一般出版社的利润率α在 5%～10%之间，我们取$\alpha=10\%$. 为了突出反映书号与经济效益的关系，我们着重研究模型Ⅱ中书号总量个数与效益的关系（见表 19）.

表 19

书号总个数	400	425	450	475	500	525	550	575	600
经济效益（万元）	1 816	2 100	2 384	2 643	2 713	2 777	2 842	2 905	2 969

我们取 A 出版社的总书号数在 400～600 这个变化范围内，现书号数是一个变量，由我们的模型计算出经济效益，结果见表 8，通过该组数据得出图 3.

由图 3 可知，书号在 500 个以前，经济效益的增长速率较大，在 500 个以后，经济效益

基本趋于平衡，所以从侧面反应出了对于A出版社的书号总量应该保持在500个左右.

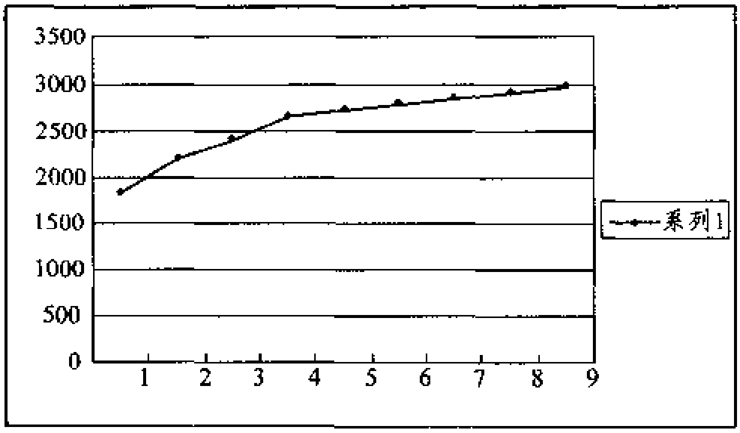


图3

5 模型的评价与改进

5.1 模型优点

（1）建立的模型稳定性较好，对于模型中的主要数据变量，波动范围较小时，结果不会有明显的偏差.

（2）建模的方法和思想对其他类似的问题也适用，且模型易于推广到多个领域．当与类似的问题结合时，仅需要改变模型中的某些参数就可作类似讨论.

（3）本文对模型的合理性进行了讨论，为模型的推广和解决同类型问题提供了有价值的参考.

（4）本文最大的优势就是对各学科书号的合理分配，给出版社带来最大的经济效益.

（5）运用多种数学软件计算，严格地对模型求解，具有科学性.

5.2 模型的不足

（1）由于约束条件对数据要求比较严格，因而模型用到的某些数据可能是不现实的，从而使模型可能得到一些不太理想的结果.

（2）回归分析是研究因变量和自变量之间变动比例关系的一种方法，最终结果一般是建立经验性的回归方程，使计算结果存在一定的偏差.

（3）在模型中使用的假设较多，不能把书号的分配以及销售量的问题考虑得十分详尽.

5.3 模型的改进

在模型的建立中，为了计算方便，对一些不易确定的因素和对总销售量影响较小的因素，如出版业市场竞争力、顾客的信任强度等进行了剔除，从而简化了计算量、分析思路．为此，可以再建立一个模型，把所有的可能因素都考虑进去，建立一个多因素的最优化模型，通过求解得到最佳的书号分配情况，使出版社获得更好的经济效益.

在社会上存在激烈的市场竞争，竞争力对出版社的可持续发展有着较大的影响．我们可以更深入地考虑出版社之间的市场竞争，在表二中给出了 24 个出版社，它们之间也存在着竞争．影响出版社竞争的因素有市场因素、能力因素和风险因素三大类．我们可以根据本题中各出版社的销售总量，总社对分社的书号分配情况以及人力资源的配置等因素建立一个出版社竞争力模型，进而对已建立的最优化模型进行改进．

5.3.1 改进模型 1

由于竞争力影响了各出版社的销售总量，而销售量的多少又决定了书号的分配情况，因此就可以对各出版社的销售总量进行决策．设在 24 个出版社中，每个出版社的总销售量为 $E_j\ (j=1, 2,\cdots, 24)$，则 24 个出版社的总销售量为 $E=\sum_{j=1}^{24} E_j$，从而定义每个出版社竞争力的权重为 $W_j=\dfrac{E_j}{E}$，即 $W=(W_1, W_2,\cdots, W_{24})$．该确定方法与我们已经建立的 A 出版社的各学科的权重类似．

5.3.2 改进模型 2

出版社竞争力可以定义为三个因素的函数：

$$Z=f(a, m, r)$$

其中，Z 表示出版社竞争力指标；a 表示出版社能力因素，指出版社在获取出版资源，利用资源的能力以及经营管理上相对竞争者所具有的优势；m 表示出版社市场因素，指出版社在市场竞争中相对竞争者所具有的市场优势；r 表示出版社风险因素，指不在出版社决策范围内，所不能控制的因素．

6 模型的推广

我们建立的模型的思想和方法对其他类似的问题也很适用，除了在图书出版销售方面的实用性较强外，还可以推广到社会中的旅游管理，人才的选拔以及公司对员工的聘用，特别是各企业对商品的销售情况和内部资源的管理等的最优决策．

参 考 文 献

[1] 姜启源．数学模型（第三版）．北京：高等教育出版社，2003

[2] 赵静，但琦．数学建模与数学实验．北京：高等教育出版社，施普林格出版社，2002

[3] （加）韩家炜，坎伯（Kamber，M.）．数据挖掘：概念与技术．北京：机械工业出版社，2004

[4] 梁国业，廖健平．数学建模．北京：冶金工业出版社，2004

[5] 吴建国．数学建模案例精编．北京：中国水利水电出版社，2005

[6] 刘丽华，姚德海．出版社竞争力评价指标体系探究．北京：经济出版社，2004

易拉罐形状和尺寸的最优设计模型

熊万胜　谭周洪　郭以龙

【摘　要】本模型是易拉罐形状和尺寸的最优设计问题．其关键问题是如何优化易拉罐形状和尺寸比例以达到节省生产成本的目的．根据最优化理论，根据给出的两种不同易拉罐形状，建立了单目标线性规划模型以及多目标线性规划模型．结合模型 1，运用化条件极值问题为无条件极值问题的方法，得出最优解：罐体的高与直径之比为 2∶1．结合模型 2，利用 Lingo8.0 进行编程计算，得到最优解：圆台上表面半径和下表面半径之比为 10∶11；上圆台的高和下圆柱的高之比为 9∶50．在自我设计部分及模型Ⅲ的建立，结合用料节省以及罐底受力分析的情况下，充分发挥想象力，通过 3DMAX7.0 绘制出了两种不同形状的易拉罐实体模型，同时也建立了相应的单目标线性规划模型，由设计一得到最优解：球冠高和圆柱高之比约为 6∶49，设计的两种实体模型，我们认为还是具有一定的参考价值的．

【关键词】最优解　线性规划　模型

1　问题重述

现在销量很大的饮料（例如，饮料量为 355 ml 的可口可乐、青岛啤酒等） 的饮料罐（即易拉罐）的形状和尺寸几乎都是一样的．这并非偶然，这是某种意义下的最优设计．当然，对于单个的易拉罐来说，这种最优设计可以节省的钱是很有限的，但是，如果生产几亿，甚至几十亿个易拉罐的话，可以节约的钱就很可观了．因此，我们着手研究什么样的形状和尺寸是易拉罐的最优设计．

首先，取一个饮料量为 355 ml 的易拉罐．例如，355 ml 的可口可乐饮料罐，测量你们认为验证模型所需要的数据？例如，易拉罐各部分的直径、高度、厚度等，并把数据列表加以说明．

其次，设易拉罐是一个正圆柱体．什么是它的最优设计？其结果是否可以合理地说明所测得的易拉罐的形状和尺寸？半径和高之比？等等．

最后，设易拉罐的中心纵断面的上面部分是一个正圆台，下面部分是一个正圆柱体．什么是它的最优设计？其结果是否可以合理地说明所测量的易拉罐的形状和尺寸？

此时，利用对所测量的易拉罐的洞察和想象力，做出自己的关于易拉罐形状和尺寸的最优设计．

用做本题以及以前学习和实践数学建模的亲身体验，写一篇短文（不超过 1 000 字，你们

的论文中必须包括这篇短文)，阐述什么是数学建模？它的关键步骤以及难点.

2 符号说明及模型假设

2.1 符号说明

h——易拉罐顶盖到底部的高；
V——易拉罐内部体积；
S——易拉罐所用材料的体积；
r——易拉罐的内瓶半径；
d——易拉罐侧面厚度
r_1——圆台的半径；
r_2——圆柱的半径；
r_3——易拉罐的半径；
S_1——圆台体积；
S_2——内部的圆台体积；
θ——圆台轴截面的底角；
h_1——圆柱体的高；
b——易拉罐材料厚度.

2.2 基本假设

(1) 易拉罐由同种材料做成；
(2) 忽略材料的接缝折边以及切割损耗；
(3) 忽略制造中工艺上必须要求的折边长度；
(4) 所装的饮料体积一定；
(5) 除易拉罐的顶盖外，罐的其他部分厚度相同；
(6) 忽略罐内液体压力对易拉罐各个部分的压强作用.

3 模型分析及模型建立

3.1 问题 1

我们以标明净含量为 355 ml 的可口可乐饮料罐（即 355 cm^3）为实测对象，得到以下数据(见表 1).

表 1

顶盖的直径	顶盖到底部的高	瓶内直径	侧面厚度	顶盖厚度	中间部分的高
6 cm	12 cm	6.6 cm	0.12 cm	0.35 cm	10.2 cm

3.2 问题 2 的模型（模型 1）

为了研究方便，我们首先将易拉罐的厚度忽略不计．要求用料最省，即求圆柱体的表面积最小．由于易拉罐的容积是一定的，所以

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

将其代入

$$S = 2\pi r^2 = 2\pi rh$$

即可得出

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

于是通过算术几何平均不等式可算出当 $h = 2r$ 时，易拉罐用料最省．但根据我们所测得的数据表明：$h \approx 4r$，因此这种设计是不合理的，其原因是考虑了材料的厚度，于是我们进行了下面的讨论．

因为在喝易拉罐的时候，要使劲拉顶盖，所以我们认为顶盖的厚度要比其他的材料要厚．假设除易拉罐的顶盖外，罐的厚度相同，顶盖的厚度为 xd（x 为顶盖厚度的待测参数．下面讨论当饮料罐内体积一定时，如何使易拉罐制作所用的材料最省．为简化讨论，我们忽略焊接所用的材料，把饮料罐看成一个近似正圆柱，形状如图 1 所示．

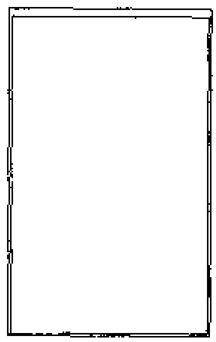


图 1

现考虑饮料罐所用材料的体积．由于，饮料罐侧面所用材料的体积为

$$(\pi(r+d)^2 - \pi r^2)(h + (1+x)d) = (2\pi rd + \pi d^2)(h + (1+x)d)$$
$$= 2\pi rhd + 2\pi r(1+x)d^2 + h\pi d^2 + \pi(1+x)d^3$$

饮料罐顶盖所用材料的体积为　　$xd\pi r^2$

饮料罐底部所用材料的体积为　　$d\pi r^2$

所以，S 和 V 分别为

$$S(r, h) = 2\pi rhd + \pi r^2(1+x)d + 2\pi r(1+x)d^2 + h\pi d^2 + \pi(1+x)d^3$$
$$V(r, h) = \pi r^2 h$$

由于 $d << r$，所以含有的项 d^2，d^3 可以忽略．因此

$$S(r, h) \approx S(r, h) = 2\pi rhd + \pi r^2(1+x)d$$

记 $g(r, h) = \pi r^2 h - V$，于是我们可以建立以下的数学模型（模型 1）：

$$\min_{r>0,\, h>0} S(r, h)$$
$$\text{s.t. } g(r, h) = 0 \tag{1}$$

其中，S 是目标函数，$g(r, h) = 0$ 是约束条件，V 是已知的（即罐内体积一定），即要在体积一定的条件下，求使罐体积最小的 r，h 和 x，且使得 r，h 和测量结果相吻合．

3.3　问题 3 的模型（模型 2）

我们在模型 1 的基础上把饮料罐近似看成由一个圆柱和圆台两部分组成．饮料罐的形状如图 2 所示，易拉罐所用材料的体积是上圆台状的外壳体积 S_1 和下圆柱体状的外壳体积 S_2 两部分之和：

$$S = S_1 + S_2$$

图 3 为圆台状的外壳的平面解析图（内、外两部分），则

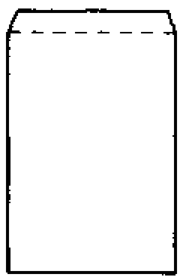


图 2

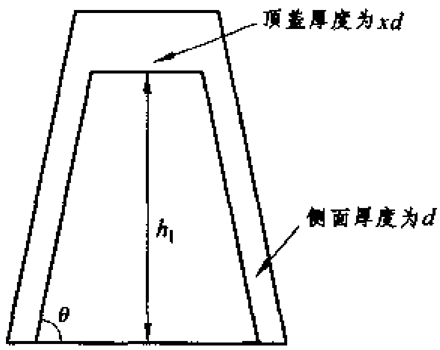


图 3

（1）圆台内部体积为

$$\frac{h_3}{3}\times\pi\left[\left(r_1-\frac{d}{\sin\theta}\right)^2+\left(r_2-\frac{d}{\sin\theta}\right)^2+\left(r_1-\frac{d}{\sin\theta}\right)\left(r_2-\frac{d}{\sin\theta}\right)\right],\quad (h_3=h_1+xd)$$

圆台体积为

$$\frac{h_3}{3}\times\pi(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$$

故 S_1 为两圆台体积之差：

$$S_1=\frac{h_3}{3}\times\pi(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)-\frac{h_1}{3}\times\pi\left[\left(r_1-\frac{d}{\sin\theta}\right)^2+\left(r_2-\frac{d}{\sin\theta}\right)^2+\left(r_1-\frac{d}{\sin\theta}\right)+\left(r_2-\frac{d}{\sin\theta}\right)\right]$$

其中，$\dfrac{d}{\sin\theta}$ 是圆台倾斜部分的材料厚度：$\dfrac{h_1}{r_2-r_1}=\tan\theta$．

（2）圆柱体状的外壳侧面的体积为

$$2d\pi r_2h_2$$

圆柱体状的外壳底部体积为

$$d\pi r_2$$

故圆柱体状的外壳体积

$$S_2=d\,\pi r_2^2+2d\,\pi r_2h_2$$

由此，我们可以建立以下的数学模型：

$$\min S(r_1,r_2,\theta),\quad r_1>0,\quad r_2>0,\quad \frac{\pi}{2}>\theta>0$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad & V=\frac{h_1}{3}\times\pi\left[\left(r_1-\frac{d}{\sin\theta}\right)^2+\left(r_2-\frac{d}{\sin\theta}\right)^2+\left(r_1-\frac{d}{\sin\theta}\right)+\left(r_2-\frac{d}{\sin\theta}\right)\right]+\\ & \left(r_2-\frac{d}{\sin\theta}\right)^2\times h_2\\ & h_3=h_1+xd,\quad \frac{h_1}{r_2-r_1}=\tan\theta\end{aligned}\tag{2}$$

3.4 问题 4 的模型（模型 3）

3.4.1 设计 1

下面我们选取几何中最常见的正方体、球体、圆柱体为研究对象（不考虑厚度），当体积一定时，判断以下哪种材料最省.

正方体：由于 $V=a^3$，所以 $a=\sqrt[3]{V}$，所以

$$S=6a^2=6\sqrt[3]{V^2}=\sqrt[3]{216V^2}$$

球：由于 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，所以 $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$，所以

$$S=4\pi r^2=4\pi\sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2}=\sqrt[3]{(4\pi)^3\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2}$$

圆柱体：由于 $V=\pi r^2h=2\pi r^3$，所以 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，所以

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+4\pi r^2=6\pi r^2=6\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}=\sqrt[3]{(6\pi)^3\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}=\sqrt[3]{54\pi V^2}$$

又因为 $\pi\approx3.14<4$，所以当体积一定时，由以上结论可知：

$$S_{正方体}>S_{圆柱体}>S_{球体}$$

于是我们考虑是否将易拉罐的形状设计成球形，应该说设计成球形是理论上的最优设计。但我们经过分析觉得不全用球体可能有以下几点原因：

（1）球体外包装的体积太大；

（2）不便于携带和摆放；

（3）球体不便于运输；

（4）制造过程复杂.

由此我们设想做成由圆柱和球冠组成的饮料罐，如图 4 所示：外壳体积 S 应为球冠状外壳的体积 S_1 和圆柱体状外壳的体积 S_2 两部分之和：

$$S = S_1 + S_2$$

球冠内部的体积为

$$\frac{\pi}{3}(3r_1 - h_2)h_2^3, \quad (h_2\text{为球冠的高})$$

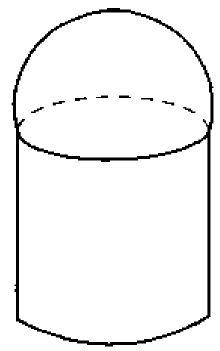


图 4

球冠的体积为

$$\frac{\pi}{3}(3r_1 - (h_1 + b))(h_2 + b^2), \quad (r_1\text{为圆柱体底面半径})$$

球冠状外壳的体积为

$$S_1 = \frac{\pi}{3}(3r_1 - (h_2 + b))(h_2 + b)^2 - \frac{\pi}{3}(3r_1 - h_2)h_2^2$$

圆柱体状外壳侧面的体积为

$$\pi r_1^2 (h_1 + b)$$

圆柱体状外壳底部的体积为

$$\pi(r_1 - b)^2 h_1$$

圆柱体状外壳的体积

$$S_2 = \pi r_1^2 (h_1 + b) + \pi(r_1 - b)^2 h_1$$

由此，我们可以建立以下的数学模型：

$$\min \ S(r_1, h_1, h_2), \ r_1>0, \ h_1>0, \ h_2>0$$

$$\text{s.t.} \ V = \frac{\pi}{3}(3r_1 - h_2)h_2^2 + \pi(r_1 - b)^2 h_1, \ (V\text{为定值}) \tag{3}$$

现在我们再来考虑饮料罐内部液体的压强对底部的影响，从而找出压强对底部的设计要求．我们都知道桥梁要设计成弓形的，这样就是为了增强桥梁的承受能力．同理我们把这样的思想用在饮料罐底部，认为应把饮料罐底部设计成向上凸的．利用《材料学》的相关内容，可简单解释如下（见图 5）：

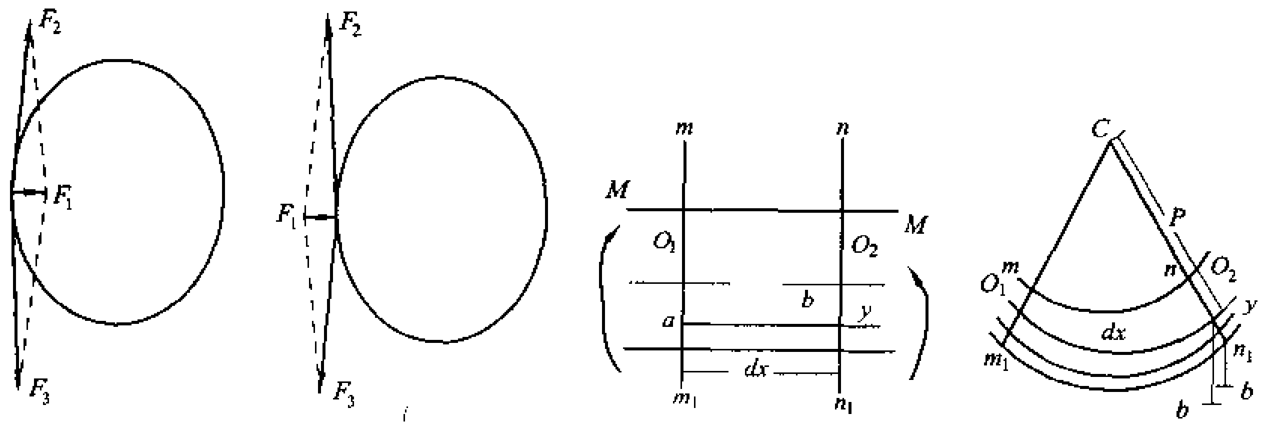


图 5

当受到力 F 作用时，截面必定发生形变弯曲．上层发生伸长．中间的一层既不收缩也不

伸长，称为中性层．中性层与截面的交线为中性轴（图中 ab 线）．而在截面的每一质点，均受到一种力矩，使之弯曲，这种力矩称为弯矩．其大小等于在这截面左边（或右边）所有外力对于截面中心 O 点的力矩代数和．而整个截面对于中性轴的力矩称为惯性矩，通过微积分的计算，可知：

$$F = \frac{My}{J_z}$$

其中，M 为弯矩，y 为该点到中性轴的距离，J_z 为惯性矩，F 为该点受到压力．由上式可知，截面上的最大压力应在弯矩最大的地方，并且在矩中线轴最远处，即有 $F_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{J_z}$（惯性矩对于同一截面为常量）．其中，$J_z$ 与 $y_{\max}$ 的比值称为抗弯曲面系数，记为 W．由于形变程度由中性层（为 0）向两侧依次递增（两侧最大），根据胡克定律及牛顿第三定律可知，压力在两侧最大，中性层为 0．这说明有相当一部分材料没有充分发挥它的作用．如果改变它们的形状，将靠近中性轴处的材料移到两侧，使得截面上的大部分材料都能承受较大的压力，这样就能增大它的负荷．截面的合理程度，可以用面积 S 与它所具有的截面系数 W 的比值 $\frac{W}{S}$ 来表示．例如，对于宽为 b，高为 h 的截面：$\frac{W}{S} = \frac{bh^2/6}{bh} = \frac{h}{6} = 0.17h$；对于直径为 h 的圆形截面：$\frac{W}{S} = \frac{\pi h^3/32}{\pi h^2/4} = \frac{h}{8} = 0.125h$．可见截面合理程度与截面的高度 h 成比例，其式子为 $\frac{W}{S} = kh$．K 是与截面有关的系数，系数越大，截面高度越大，机械强度就越强．由于立体曲面在同等面积的前提下，截面高度越大，自然机械强度也最大，即承受压力的能力越强．但底部向上凸的高度也不能太大，我们可以通过计算得出刚能承受饮料罐内部液体压强的高度，而这里进行只需把底部稍微向上凸就足以承受饮料罐内部液体的压强，由于知识体系的限制，无法进行深入的研究和解释．

3.4.2 设计 2

因为当体积一定时，球体最省材料．现在我们设想饮料罐由球体和长方体（球体的半径和长方体的长相等，下底面为一平面）组成．如图 6 所示（哨状）．此图形的体积可近似看成圆柱体加上长方体的一半．当体积为定值 V 时，a 为长方体的高和宽，r 为长方体的长和球体的半径，V 为饮料罐能装液体的体积（定值），根据公式

$$V = 3 \div 4 \times \pi \times r^3 + \frac{1}{2}a^2 r$$

求得

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V + \frac{1}{2}a^2 r}$$

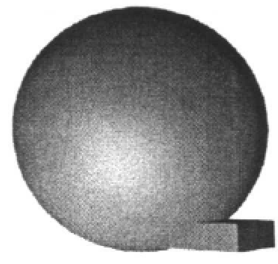


图 6

这时厂家可以根据需要确定 a，解出 r，确定图形．我们也知道球体的饮料罐的缝接地方少，用材料面积少，这两样指标可以大大降低成本．工作时间比其他形状的饮料罐也更低廉．由于时间关系，我们无法分析其中的原因，故提出此模型，以做参考．

4　模型的求解

4.1　问题 2

从约束中解出一个变量，化条件极值问题为求一元函数的无条件极值问题从 $g(r, h)=\pi r^2 h - V = 0$，解出 $h=\frac{V}{\pi r^2}$，代入 S，使原问题化为：求 $2r:h$，使 S 最小，即求 r，使

$$S(r,h(r))=d\left[\frac{2V}{r}+\pi(1+x)r^2\right]$$

最小.

求临界点：令其导数为零，得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}=2d\left[(1+x)\pi r-\frac{V}{r^2}\right]=\frac{2d}{r^2}((1+x)\pi r^3-V)=0$$

解得临界点为 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{(1+x)\pi}}$，因此

$$h=\frac{V}{\pi}\left(\sqrt[3]{\frac{2(1+x)\pi}{V}}\right)^2=2(1+x)\left(\sqrt[3]{\frac{V}{(1+x)\pi}}\right)=(1+x)r=\frac{(1+x)2r}{2}$$

测量数据得 $\frac{h}{r}=2$，即 $4=1+x$，所以 $x=3$，即顶盖的厚度是其他材料厚度的 3 倍．为验证这个 r 确实使 S 达到极小，下面计算 S 的二阶导数

$$S''=4d\left[2\pi(1+x)+\frac{2V}{r^3}\right]>0,\quad r>0$$

所以，这个 r 确实使 S 的局部达到极小因为临界点只有一个，因此也是全局极小．这个结论和我们测得的结果——顶盖厚度大约是其他部分的材料厚度 3 倍是基本符合的．同时，我们得到料罐直径与他的高之比接近于 1∶2，这与现在厂家生产出的饮料罐的标准也是一致的．

验证： 考虑实际所用材料的模型．实际上，顶盖的半径为 $r+0.6$ cm，而正圆柱的高为 $h+0.6$ cm，因此

$$S=3\pi(R+0.6)^2d+\pi r^2d+2\pi(h+0.4)d=(4\pi r^2+4.4\pi r+1.08\pi+2\pi rh)d$$

$$V=\pi r^2 h,\quad h=\frac{V}{\pi r^2}$$

问题化为：当 V 固定时，求 $d:h$，使 S 最小．我们从约束中解出一个变量，化条件极值问题为求一元函数的无条件极值问题，即

$$S(r)=4\pi r^2+4.4\pi r+1.08\pi+\frac{2V}{r}$$

$$S'(r)=\frac{2}{r^2}[4\pi r^2+2.2\pi r-V]=0$$

$$S''(r)=4\pi+\frac{4V}{r^3}>0$$

把数值代入，由于 $V=365\ \text{cm}^3$，可得，$r\approx2.9$，$h=\dfrac{365}{\pi r^2}\approx13.8$，所以，$h:2r\approx2.4$. 高是直径的 2.4 倍.

从而，从模型得出的结论和实际所用材料的模型的结论也是基本符合的.

4.2 问题 3

我们利用 Lingo8.0 编程（见程序附录二）得到了：圆台的半径 r_1 与圆柱的半径 r_2 之比，约为 9∶50. 该结论与我们测得的饮料罐的尺寸是符合的.

4.3 问题 4

运用 Lingo8.0（见程序附录三）得到了球冠高 h_1 与圆柱体的高 h_2 之比，约为 6∶49. 用材料的体积比做成纯圆柱的易拉罐的用料略小，其用材的体积比为 27.8∶29，也就是说，多用的材料体积是原来的 $\frac{6}{139}$. 这种易拉罐对工艺要求更高.

5 结果分析与检验

模型 1 可以准确的解决近似于圆柱体的易拉罐，能计算出圆柱体易拉罐的底部直径和高之比以及其他的数据. 模型 1 虽然和模型 2 有区别，但是这两个模型对圆柱体易拉罐计算出的各项数据都很接近. 模型 1 和模型 2 对于其他的形状就不太合适了. 鉴于这些局限性，我们就设计了两种不常见的形状：球体和圆柱体及球冠的结合体. 这两种模型在某些方面可以很好的同其他形状的易拉罐作比较，比其他的易拉罐也更有优势.

6 模型的评价、改进及推广

在第 2 问中，当易拉罐为圆柱体的时候，我们直接以制作易拉罐用料最省这一目标建立模型，此模型能很好地接受我们实测的易拉罐高和直径之比及其他数据的检验. 在第 3 问中，当易拉罐上部为圆台和下部为圆柱体的时候，要使制作的易拉罐用料最省，即使上部圆台和下部圆柱体的用料同时最少，我们以这两个目标建立了多目标非线性规划模型. 用此模型求得的最优解能很好的和实测的易拉罐高和直径之比及其他数据吻合. 在第 4 问中，第一种设计是选择了上部为球冠和下部为圆柱体的形状，而且圆柱体的底部是向上凸的. 这样的设计一方面考虑到球体易拉罐的运输、储存不方便等多方面的因素，另一方面也考虑到在同等体

积下，圆柱体易拉罐比球体易拉罐用材料多，所以可将两者完美的结合．而圆柱体的底部向上的直接原因是考虑了曲面承受力的能力比平面强，这也是我们以前没有考虑到的．第二种设计，首先把握住在同等体积的情况下，制作易拉罐用料最省，进而选择了球体作为易拉罐的形状，又考虑到在这种形状下，易拉罐的造价最低．另外，它也可适用于其他的罐装产品，只不过在温度等因素下，此模型有一定的误差．

7　2006年数学建模体会

数学建模，简单地讲就是将实际问题变为用数学语言描述的数学问题的过程．其中对应的数学问题就是数学模型，通过对该数学模型的求解可以获得相应实际问题的解决方案或对相应实际问题有更深入的了解．数学建模问题不只是一个纯数学问题．它和我们的实际生活相联系．以易拉罐形状和尺寸的最优设计为例，此题提出了在我们的生活中，随处都可见到的易拉罐．如可口可乐、八宝粥、椰子汁、红牛，等等．这些瓶子罐子几乎千篇一律都是圆柱体．为什么会是圆柱体呢？为什么不采用球体或正方体呢？这样对厂家有什么好处呢？我们产生了疑问，于是对这个问题进行了研究、讨论．因此，了解和学习数学建模知识对渴望提高自身科研素质的人们无疑是很有帮助的．

下面略为具体一点地说明数学建模这一过程．我们可用下面的框图（见图7）来说明：

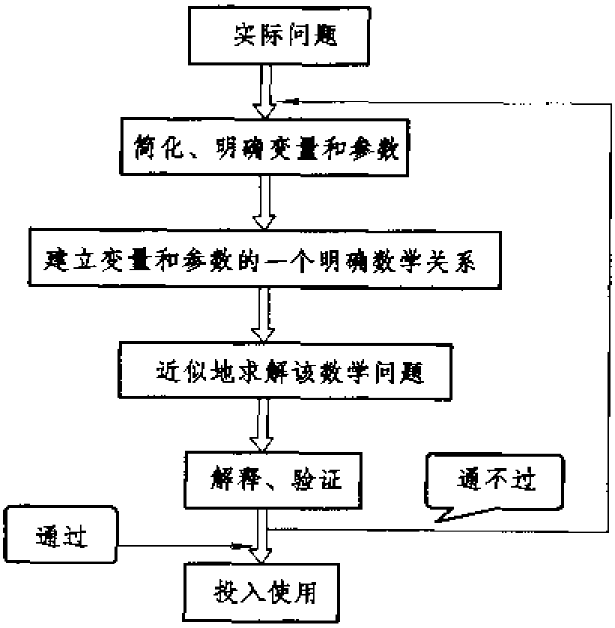


图 7

本题的数学模型是使饮料罐的制造所用的材料最省．首先，把饮料罐假设为正圆柱体（实际上由于制造工艺等要求，它不可能正好是数学上的正圆柱体，但这样简化确实是近似的、合理的）．在这种简化下，我们就可以来明确变量和参数了．例如，可以假设：V为罐装饮料的体积，r为半径，h为圆柱高，d为制罐铝材的厚度，i为制造中工艺上必须要求的折边长度，

在上面的诸多因素中，我们先不考虑折边 l 这个因素，于是

$$V=\pi r^2 h$$

由于易拉罐上底的强度必须要大一点，因而在制造上其厚度为罐的其他部分厚度的 3 倍．因而制罐用材的总面积

$$S=3\pi r2d+\pi r2d+2\pi hd=(4\pi r^2+2\pi rh)d$$

每罐饮料的体积是一样的，因而 V 可以看成是一个常数（参数），解出 h，得

$$h=\frac{V}{\pi r^2}$$

代入 S，得

$$S=S(r)=2\pi d\left(2r^2+\frac{V}{\pi r}\right)$$

从而，用材最省的问题就是求半径 r 使 S（r）达到最小的问题．S（r）的表达式就是一个数学模型，可以用多种精确或近似方法求 S（r）的极小值及相应的 r．例如，用微积分的办法易得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}=2\pi d\left(4r-\frac{V}{\pi r^2}\right)=0\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$$

从而求得

$$h=\frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\left(\frac{4\pi}{V}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{(4\pi)^2}{\pi^3}}=4\sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}=4r$$

即罐高 h 应为半径 r 的 4 倍．当你拿起可口可乐、百事可乐、健力宝等饮料罐头测量一下时，高 h 和半径 r 的比几乎与上述计算完全一致．

其实这一点也不奇怪．这些大饮料公司年生产的罐装饮料都高达几百万罐，甚至更多，因而从降低成本和获取利润的角度，这些大公司的设计部门一定会考虑在同样工艺条件、保证质量前提下用材最省的问题．但是又有很多饮料罐不是这样的，这其中的原因留待我们作出进一步调查后去思考．

还可以把折边 l 这一因素考虑进去，然后得到相应的数学模型，并求解之，最后看看与实际符合的程度如何．

将抽象的实际问题转化为数学模型是数学建模的难点所在．如将该题目中的易拉罐的用料问题转化为数学模型，并且要利用该模型说明当易拉罐是一个正圆柱体时，什么是它的最优设计？又当上面部分是一个正圆台，下面部分是一个正圆柱体，什么是它的最优设计等一系列问题．另外，还要利用数学模型说明自己设计的易拉罐形状和尺寸的最优设计．这就是说，数学来源于实践，又用于实践，并利用数学指导实践．

参 考 文 献

[1] 王绵森，马知恩．工科数学分析基础（上册）．北京：高等教育出版社，1998

[2] 谢金星，薛毅．优化建模与 Lingo/Lingo 软件．北京：清华大学出版社，2005

[3] 姜启源．数学建模（第三版）．北京：高等教育出版社，2003

易拉罐形状和尺寸的最优设计模型

唐为民　彭　景　范　鑫

【摘　要】本问题是关于易拉罐的形状和尺寸最优化设计问题．文章主要以易拉罐所用材料的多少为标准，对易拉罐的形状和尺寸进行分析，逐步建立易拉罐的最优化设计模型．当易拉罐为一圆柱体时，在容积一定的前提下，最优形状的易拉罐所用材料的体积最小．利用算术几何平均值不等式求极小值的方法，以易拉罐表面积为目标函数的优化模型，求出盖直径和罐高之比，其值为 $D:h=1:1$．这与所测量的顶盖到底的高度约为顶盖直径的2倍这一关系式不相符合，这是由于易拉罐顶盖的厚度与其他部分材料的厚度不相同造成的．为此文中用易拉罐所用材料的体积最少来建立优化模型，将圆柱体基本模型进一步改进，且求出在易拉罐制作方面所用材料最省的前提下，易拉罐顶盖直径和从顶盖到底部的高之比的数据为 $D:h=1:2$，进而证实利用 Lingo 编程所得的理论数据与实际测量易拉罐所得的数据基本相符．为了提出易拉罐的最优设计模型，建立以易拉罐所用材料体积为目标函数，从体积一定的情况下球的表面积最小的思路出发，设计了球形易拉罐，并对球形易拉罐进行改进．

【关键词】易拉罐　材料　最优化　模型

1　问题重述

水是生命之源，以水为原料的商品很多，下面就以耳熟能详的“可口可乐”为例．在众多不同品种中，饮料量均为 355 ml，形状与尺寸几乎都是一样．这些都说明在某种意义下的最优设计，易拉罐可能会节约相当可观的资源并获得巨大的利润．由此研究易拉罐形状和尺寸的最优设计问题：

（1）取一个 355 ml 的易拉罐，测量验证模型所需数据．

（2）设易拉罐是一个正圆柱体，找出其最优设计，并跟实际所测数据进行比较，分析其合理性．

（3）将正圆柱体易拉罐改装成上面部分是一个正圆台，下面部分是一个正圆柱体，建立此种情况的最优设计模型，并分析其数据的合理性．

（4）通过以上模型的分析，做出易拉罐模型的最优设计方案．

（5）利用做本题以及以前学习和实践数学建模的亲身体验，写一篇论文．

2 符号说明及模型假设

2.1 符号说明

V_0——罐内容积；
V——易拉罐用料体积；
V_2——球形易拉罐用料体积；
V_3——壶式易拉罐用料体积；
V_4——最优化易拉罐用料体积；
r_1——圆柱形的圆半径；
r_2——圆台上底面的圆半径；
R_1——球形易拉罐半径；
R_2——壶式易拉罐的下缺口半径；
R_3——壶式易拉罐的上缺口半径；
h_1——圆柱形的高；
h_2——圆台的高；
λ_1——易拉罐上、下底面单位面积造价；
λ_2——易拉罐侧面价格；
α——上底与侧面厚度比例系数；
d——除顶盖外其他部分材料厚度.

2.2 模型假设

（1）易拉罐内部容积一定.
（2）易拉罐由同种材料制作而成.
（3）除顶盖外其他部分材料厚度相同.
（4）针对问题 1、2，假定易拉罐为圆柱体.
（5）针对问题 3，假定易拉罐上面部分是一个正圆台，下面部分是一个正圆柱体.
（6）易拉罐均能承受内部压力.

3 模型建立与问题分析

对易拉罐的设计，经营者总是考虑让成本最低．如，设计一个体积固定为 V 的圆柱形易拉罐，什么样的设计方案最优？

3.1 模型 1 的理论求解（简单圆柱体模型建立）

通过对问题的分析，要比较易拉罐的优劣，可由制造过程中所消耗铁皮的多少来判别优

劣，即最优易拉罐应具有最小的表面积.

由圆柱的体积公式，得

$$V_0=\pi r_1^2 h_1$$

得

$$h_1=\frac{V_0}{\pi r_1^2} \tag{1}$$

又易知易拉罐的表面积为

$$S=2\pi r_1^2+2\pi r_1 h_1 \tag{2}$$

将（1）式代入（2）式可得

$$S=2\pi r_1^2+\frac{2V_0}{r_1} \tag{3}$$

由设计要求知，体积 V_0 是常数，半径 r_1 是变量，表面积 S 是 r_1 的函数，故设计方案转化为数学问题：当 r_1 取何值时，函数 S 取最小值？于是，目标函数可为

$$\min S=2\pi r_1^2+\frac{2V_0}{r_1} \tag{4}$$

而 $S=2\pi r_1^2+\frac{V_0}{r_1}+\frac{V_0}{r_1}\geqslant 3\sqrt[3]{2\pi r_1^2\cdot\frac{V_0}{r_1}\cdot\frac{V_0}{r_1}}=3\sqrt[3]{2\pi V_0^2}$，由此可看出，当且仅当 $2\pi r_1^2=\frac{V_0}{r_1}$，即 $r_1=\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$ 时，易拉罐具有最小的表面积 $S=3\sqrt[3]{2\pi V_0^2}$，此时易拉罐的高 $h_1=2r_1$. 也就是说，当易拉罐设计成等边圆柱时，消耗铁皮最少.

但在实际生活中，我们所看到的易拉罐常常不是等边圆柱形的，有时长些，有时短些. 这又是什么原因呢？

（1）这是因为考虑到用于做上、下底面与侧面所用材料的价格不同，做一个易拉罐所需材料的价格为 $y=\lambda_1 2\pi r_1^2+\lambda_2 2\pi r_1 h_1$，于是，目标函数可转化为

$$\min y=\lambda_1 2\pi r_1^2+\lambda_2 2\pi r_1 h_1 \tag{5}$$

要使具有最低的价格，则

$$y=\pi(2\lambda_1 r_1^2+\lambda_2 r_1 h_1+\lambda_2 r_1 h_1)\geqslant 3\pi\sqrt[3]{2\lambda_1\lambda_2^2\cdot r_1^4 h_1^2}$$

当且仅当 $2\lambda_1 r_1^2=\lambda_2 r_1 h_1$，即 $h=\frac{2\lambda_1 r_1}{\lambda_2}$ 时，易拉罐价格最低. 此时易拉罐不再是等边圆柱了.

（2）易拉罐顶盖厚度是其他部分材料厚度的 α 倍（厚，因为它要使劲拉），进而通过对问题的分析，这时需考虑易拉罐用料体积.

圆柱形易拉罐侧面用料体积为

$$\begin{aligned}V_1&=(\pi(r_1+d)^2-\pi r_1^2)(h_1+(1+\alpha)d)\\&=(2\pi r_1 d+\pi d^2)(h_1+(1+\alpha)d)\ 2\pi r_1 h_1 d+2\pi r_1(1+\alpha)d^2+h_1\pi d^2+\pi(1+\alpha)d^3\end{aligned} \tag{6}$$

圆柱形易拉罐顶盖用料体积为 $\alpha d\pi r_1^2$，底部用料体积为 $d\pi r_1^2$，所以易拉罐用料体积为

$$V = 2\pi r_1 h_1 d + 2\pi r_1(1+\alpha)d^2 + h_1\pi d^2 + \pi(1+\alpha)d^3 + \alpha d\pi r_1^2 + d\pi r_1^2$$

$$= 2\pi r_1 h_1 d + \pi r_1^2(1+\alpha)d + 2\pi r_1(1+\alpha)d^2 + h_1\pi d^2 + \pi(1+\alpha)d^3 \tag{7}$$

且 $V(r_1, h_1) = \pi r_1^2 h_1$，因为 d 远小于 r_1，所以带 d^2，d^3 的项可以忽略，因此

$$V(r_1, h_1) \approx 2\pi r_1 h_1 d + \pi r_1^2(1+\alpha)d \tag{8}$$

记 $f_1(r_1, h_1) = \pi r_1^2 h_1 - V_0$，于是可建立以下的数学模型：

$$\min_{r_1>0, h_1>0} V(r_1, h_1) = 2\pi r_1 h_1 d + \pi r_1^2(1+\alpha)d$$

$$\text{s.t.} \quad f_1(r_1, h_1) = \pi r_1^2 h_1 - V_0 = 0 \tag{9}$$

其中 V 是目标函数，$f_1(r_1,\ h_1) = 0$ 是约束条件，V_0 是已知的（即罐内体积一定），即要在容积一定的条件下，求罐的容积最小的 r_1，h_1 和 α，使得 r_1，h_1 和测量结果吻合．先从约束中解出一个变量，化条件极值问题为求一元函数的无条件极值问题．

由 $f_1(r_1, h_1) = \pi r_1^2 h_1 - V_0$，解出 $h_1 = \dfrac{V_0}{\pi r_1^2}$，代入（8）式使原问题化为：求 r_1∶h_1，使 V 最小，即求 r_1 使

$$\min V(r_1, h_1) = d\left[\frac{2V_0}{r_1} + \pi(1+\alpha)r_1^2\right] \tag{10}$$

令其导数为零，求临界点：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r_1} = 2d\left[(1+\alpha)\pi r_1 - \frac{V_0}{r_1^2}\right] = \frac{2d}{r_1^2}((1+\alpha)\pi r_1^3 - V_0) = 0$$

得
$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{V_0}{(1+\alpha)\pi}}$$

$$h_1 = \frac{V_0}{\pi}\left(\sqrt[3]{\frac{2(1+\alpha)\pi}{V_0}}\right)^2 = 2(1+\alpha)\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{(1+\alpha)\pi}}\right) = (1+\alpha)r_1$$

通过问题分析可有：$1+\alpha = 4$，$\alpha = 3$，且此时 $h_1 = 4r_1$．

为了验证以上的 r_1 的确使 V 达到极小，计算 V 的二阶导数，得

$$V'' = 4d\left[2\pi(1+\alpha) + \frac{2V_0}{r_1^3}\right] > 0$$

因为存在 $r_1 > 0$，所以，以上的 r_1 确实使 V 达到局部极小，因为临界点只有一个，因此也是局

部极小，因而日常生活中所见到的易拉罐就不会是等边圆柱形，如图 1 所示.

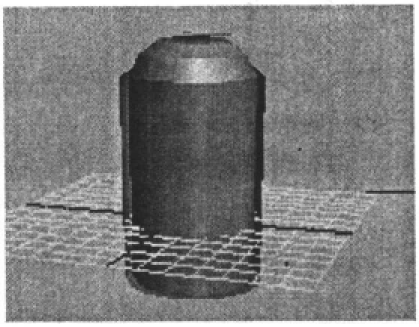


图 1

3.2　模型 2（普通易拉罐模型）

首先把易拉罐近似看成一个正圆柱是有一定合理性的. 这与模型 1 中将易拉罐体积看成一定的条件下，利用算术、几何平均值的不等式，求出的能使易拉罐制作所用的材料最省的顶盖的直径和从顶盖到底部的高之比的数据相吻合. 但实际上易拉罐的上面部分是一个正圆台，下面部分是一个正圆柱体，且在同样材料厚度上其顶盖厚度是其他部分的材料厚度的 3 倍. 通过对问题的分析，要建立恰当的数学模型需考虑所用材料的体积，故可将设计方案转化为数学问题中的优化问题.

3.2.1　不考虑易拉罐厚度的情况下，普通易拉罐模型

易拉罐侧面所用材料的表面积为圆柱形侧面所用材料的表面积与圆台形侧面所用材料的表面积之和，即

$$S_1 = 2\pi r_1 h_1 + \pi\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h_2^2}(r_1 + r_2) \tag{11}$$

易拉罐顶盖所用材料的表面积为 πr_2^2，易拉罐底部所用材料的表面积为 πr_1^2，进而易拉罐整个表面的表面积为

$$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + 2\pi r_1 h_1 + \pi\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h_2^2}(r_1 + r_2) \tag{12}$$

于是，通过对问题的分析，目标函数可转化为

$$\min S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + 2\pi r_1 h_1 + \pi\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h_2^2}(r_1 + r_2) \tag{13}$$

且存在

$$\left.\begin{aligned} & V_1 = \pi r_1^2 h_1 + \frac{1}{3}(\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_1 r_2)h_2 \\ & r_1, r_2, h_1, h_2 > 0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

于是可建立以下的数学模型：

$$\min S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + 2\pi r_1 h_1 + \pi\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h_2^2}(r_1 + r_2)$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} V_1 - V_0 = 0 \\ r_1, r_2, h_1, h_2 > 0 \end{cases} \tag{15}$$

其中 S 是目标函数，$V_1 - V_0 = 0$ 是约束条件，V_0 是已知的（即罐内体积一定），即要在体积一定的条件下，求易拉罐的表面积最小的 r_1，r_2，h_1，h_2，使得其值与测量结果相吻合. 且此时利用 Lingo 编程可得：$r_1 \approx r_2$，$h_1 \approx h_2$.

3.2.2 考虑易拉罐厚度的情况下，普通易拉罐模型

易拉罐侧面用料体积为圆柱形侧面用料体积与圆台形侧面用料体积之和，即

$$V_1=[\pi(r_1+d)^2-\pi r_1^2]h_1+\pi\sqrt{(r_1-r_2)^2+h_2^2}(r_1+r_2)d \tag{16}$$

易拉罐顶盖用料体积为 $\alpha\pi r_2^2 d$，易拉罐底部用料体积为 $\alpha\pi r_1^2$，进而普通易拉罐用料体积为

$$V(r_1,r_2,h_1,h_2)=[\pi(r_1+d)^2-\pi r_1^2]h_1+\pi\sqrt{(r_1-r_2)^2+h_2^2}(r_1+r_2)d+\alpha\pi r_2^2 d+d\pi r_1^2$$

$$=\pi d^2h_1+2\pi r_1dh_1+\pi\sqrt{(r_1-r_2)^2+h_2^2}(r_1+r_2)d+\alpha\pi r_2^2 d+d\pi r_1^2$$

由于 r_1，r_2 远大于 d，所以式子中含 d^2 的项可以忽略，因此

$$V(r_1,r_2,h_1,h_2)=2\pi r_1dh_1+\pi\sqrt{(r_1-r_2)^2+h_2^2}(r_1+r_2)d+\alpha\pi r_2^2 d+d\pi r_1^2 \tag{17}$$

并且存在以下的约束条件：

$$f(r_1,r_2,h_1,h_2)=\pi r_1^2h_1+\frac{1}{3}(\pi r_2^2+\pi r_1r_2+\pi r_1^2)h_2-V_0 \tag{18}$$

于是可建立以下的数学模型：

$$\min_{r_1,r_2,h_1,h_2>0} V(r_1,r_2,h_1,h_2)$$

$$\text{s.t.}\ f(r_1,r_2,h_1,h_2)=0 \tag{19}$$

其中 V 是目标函数，$f(r_1,r_2,h_1,h_2)=0$ 是约束条件，V_0 是已知的（即罐内体积一定），即要在体积一定的条件下，求罐的体积最小的 r_1,r_2,h_1,h_2 和 α，使得其值和测量结果相吻合.

3.3 模型 3（新设计的易拉罐模型）

本模型对易拉罐具体制作工序，及对易拉罐的存放、装载、运输等方面暂不考虑，先从节料方面着手，因为在体积一定的几何形体里，球的表面积最小，于是建立：

3.3.1 易拉罐的球体节料模型

球形易拉罐所用材料的体积：$V_2=\frac{4}{3}\pi R_1^3 d$，且存在 $g_1(R_1)=\frac{4}{3}\pi R_1^3-V_0=0$，所以建立的优化模型为

$$\min_{R_1>0} V_2=\frac{4}{3}\pi R_1^3 d$$

$$\text{s.t.}\ g_1(R_1)=\frac{4}{3}\pi R_1^3-V_0=0 \tag{20}$$

利用 Lingo 编程可知，在体积一定的容器里，此种模型能使制造易拉罐所用的材料最节省，进而使厂家赢利最多，但是这样的球形易拉罐不便于消费者携带和商家运输，所以也可以称此模型为生产商模型.

上面只考虑生产商利益的模型，是不符合市场经济规律的，所以本文在考虑厂商、销售商、消费者三方利益的情况下建立.

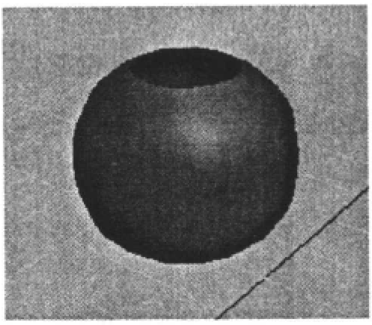


图 2

3.3.2　仿古茶壶模型

仿古茶壶（去茶嘴）可看做是球体按照一定比例除去上下球冠而成的，如图 2 所示.

茶壶式易拉罐用料体积：

$$V_3=\beta d\pi R_2^2+\alpha d\pi R_3^2+$$

$$d\left[4\pi R_1^2-2\pi R_1\left(R_1-\sqrt{R_1^2-R_3^2}\right)-\pi R_3^2-2\pi R_1\left(R_1-\sqrt{R_1^2-R_2^2}\right)-\pi R_2^2\right]$$

且存在

$$g_2(R_1,R_2,R_3)=\frac{4}{3}\pi R_1^3-\frac{1}{3}\pi\left(R_1-\sqrt{R_1^2-R_2^2}\right)^2\left(3R_1-\sqrt{R_1^2-R_2^2}\right)-$$

$$\frac{1}{3}\pi\left(R_1-\sqrt{R_1^2-R_3^2}\right)^2\left(R_1-\sqrt{R_1^2-R_3^2}\right)-V_0=0$$

所以建立的优化模型为

$$\min_{R_1,R_2,R_3>0} V_3$$

$$\text{s.t. } g_2(R_1,R_2,R_3)=0 \tag{21}$$

在建立上面带有传统元素的模型的同时，也建立了下面的模型.

3.3.3　时尚模型

为了方便使用，建立了时尚模型，具有一定的视觉享受. 但本模型可简单地分解成上部是一个茶壶体，而下部是圆台，如图 3 所示.

上部分的茶壶用料体积为

$$V_{41}=\alpha d\pi R_3^2+d\left[4\pi R_1^2-2\pi R_1\left(R_1-\sqrt{R_1^2-R_3^2}\right)-\pi R_3^2-2\pi R_1\left(R_1-\sqrt{R_1^2-R_2^2}\right)-\pi R_2^2\right]$$

下部的圆台用料体积为

$$V_{42}=\beta d\pi R_4^2+d\left[\pi(R_2+R_4)\sqrt{h_2^2+(R_4-R_2)^2}\right]$$



图 3

于是，最优化易拉罐用料体积为

$$V_4=V_{41}+V_{42}$$

且存在

$$g_3(R_1,R_2,R_3,R_4,h_2)=\frac{1}{3}\left(\pi R_2^2+\pi R_2R_4+\pi R_4^2\right)h_2+\frac{4}{3}\pi R_1^3-$$

$$\frac{\pi}{3}\left(R_1-\sqrt{R_1^2-R_3^2}\right)^2\left(3R_1-\sqrt{R_1^2-R_3^2}\right)-\frac{\pi}{3}\left(R_1-\sqrt{R_1^2-R_2^2}\right)^2\left(3R_1-\sqrt{R_1^2-R_2^2}\right)-V_0=0$$

这时，所建的优化模型为

$$\min_{R_1,R_2,R_3,R_4,h_2} V_4\left(R_1,R_2,R_3,R_4,h_2\right)$$
$$\text{s.t.}\quad g_3\left(R_1,R_2,R_3,R_4,h_2\right)=0 \tag{22}$$

4 模型的求解

4.1 问题 1 的求解

以一个 355 ml 的可口可乐易拉罐为例，对其进行测量.

测量方法：利用游标卡尺和千分尺等工具对表 1 中各项指标（如，顶盖到底部的高度、顶盖直径等）分别进行了测量，并采用了多次测量（这里我们测了 5 次）求平均值的方法，尽量减少测量中由于环境和不正确的测量方法所带来的误差，从而提高计算结果的准确性，各项指标的测量值如表 1 所示.

表 1

各项指标 / 次数	顶盖到底部的高度（mm）	中间胖的部分直径（mm）	顶盖直径（mm）	侧面材料厚度（mm）	顶盖材料厚度（mm）	底盖厚度（mm）	圆台部分高度（mm）
1	123.14	63.80	59.26	0.04	0.10	0.10	13.26
2	123.12	63.94	59.30	0.06	0.12	0.06	13.30
3	123.20	63.88	59.34	0.04	0.14	0.10	13.28
4	123.22	63.96	59.32	0.04	0.12	0.08	13.34
5	123.16	63.90	59.24	0.06	0.14	0.08	13.30

下面求出所测量的数据的平均值（结果保留两位小数）.

顶盖到底部的高度

$$h=\frac{123.14+123.12+123.20+123.22+123.16}{5}\times10^{-1}\approx12.32\text{ cm}$$

中间胖的部分的直径

$$2r_1=\frac{63.80+63.94+63.88+64.96+63.90}{5}\times10^{-1}\approx6.41\text{ cm}$$

顶盖的直径

$$2r_2=\frac{59.26+59.30+59.34+59.32+59.24}{5}\times10^{-1}\approx5.92\text{ cm}$$

侧面材料的厚度

$$d_1 = \frac{0.04+0.06+0.04+0.04+0.06}{5} \approx 0.04\times10^{-1}\ \text{cm}$$

顶盖材料厚度

$$d_2 = \frac{0.10+0.12+0.14+0.12+0.14}{5} \approx 0.12\times10^{-4}\ \text{cm}$$

底盖厚度

$$d_3 = \frac{0.10+0.06+0.10+0.08+0.08}{5} \approx 0.08\times10^{-1}\ \text{cm}$$

圆台部分高度

$$h_2 = \frac{13.26+13.30+13.28+13.34+13.30}{5} \approx 1.33\ \text{cm}$$

由以上数据可以看出：顶盖材料厚度 d_2 约为侧面材料厚度 d_1 的 3 倍，即待定参数 $\alpha=3$，且顶盖到底部的高度约为顶盖直径的 2 倍．这正与上述建立的数学模型，利用 LINGO 软件包求解有约束条件非线性规划的数学问题所得的理论值相符合．

4.2 问题 2 的求解

首先把易拉罐近似地看成一个圆柱体．通过对问题的分析，比较易拉罐的优劣．可由制造过程中所消耗材料的多少来判别优劣，即最优易拉罐应具有最小的表面积．进而可将易拉罐体积看成一定的条件下，得出所需要的基本模型．再利用算术、几何平均值不等式求极小值的方法，使得求出的能使易拉罐制作所用的材料最省的顶盖的直径和从顶盖到底部的高之比的数据为 $D:h=1:1$，这恰好符合易拉罐是一个正圆柱体，但是这与所测量的顶盖到底的高度约为顶盖直径的 2 倍这一关系式不相符合．为了解决这一问题，考虑到易拉罐顶盖的厚度是其他部分材料厚度的 α 倍，这时可考虑如何能使易拉罐所用材料的体积最少．通过对问题的分析，将圆柱体基本模型作了进一步的改进，建立了圆柱体易拉罐的最优化模型：

$$\min_{r_1>0,\, h_1>0} V(r_1,h_1) = 2\pi r_1 h_1 d + \pi r_1^2(1+\alpha)d$$

$$\text{s.t.} f(r_1,h_1) = \pi r_1^2 h_1^2 - V_0 = 0 \tag{23}$$

利用算术、几何平均值不等式求极小值的方法，此时求出的能使易拉罐制作所用的材料最省的顶盖的直径和从顶盖到底部的高之比的数据为 $D:h=1:2$，同时待定参数 $\alpha=3$，这与利用 Lingo 软件包（见附页中的程序 2）求解有约束条件非线性规划解优化问题的方法所得的数据（$r_1=3.046\,115$ cm，$r_2=12.184\,66$ cm）恰好相吻合．进而更进一步地证实了理论求解所得的数据与实际测量易拉罐所得的数据的吻合程度是非常的好．

4.3 问题 3 的求解

为了设计上面部分是一个正圆台、下面部分是一个正圆柱体的易拉罐最优模型，首先在

不考虑易拉罐厚度的情况下，建立了易拉罐表面积的最优化模型，并利用 Lingo 软件包求解有约束条件非线性规划的优化问题，可得出圆台半径近似等于圆柱半径，圆台部分的高度近似等于圆柱部分的高度，那么此时的最优化图形就可近似看成圆柱体．但在实际生活中，易拉罐常常不是圆柱形．为了解决这一问题，对易拉罐表面积的最优化模型作了进一步的改进，建立了易拉罐用料的最优化模型（此种情况考虑易拉罐的厚度）：

$$\min_{r_1, r_2, h_1, h_2>0} V(r_1, r_2, h_1, h_2) = 2\pi r_1 d h_1 + \pi\sqrt{(r_1-r_2)^2+h_2^2}(r_1+r_2)d + \alpha\pi r_2^2 d + d\pi r_1^2$$

$$\text{s.t.} f(r_1, r_2, h_1, h_2) = \pi r_1^2 h_1 + \frac{1}{3}(\pi r_2^2 + \pi r_1 r_2 + \pi r_1^2)h_2 - V_1 \tag{24}$$

利用 Lingo 编程（见附页中的程序 4）求解，可得以下数据：

$$r_1 = 3.462\,427\ \text{cm},\quad r_2 = 1.418\,969\ \text{cm},$$

$$h_1 = 9.033\,671\ \text{cm},\quad h_2 = 0.746\,086\,5\ \text{cm}$$

这正与所测量的数据基本吻合．

4.4 问题 4 的求解

利用在体积一定的几何形体里，球的表面积最小，于是首先建立了易拉罐的球面优化模型：

$$\min_{R_1>0} V_2 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 d$$

$$\text{s.t.}\ g_1(R_1) = \frac{4}{3}\pi R_1^3 - V_0 = 0 \tag{25}$$

利用 Lingo 编程可知，在体积一定的容器里，此种模型能使制造易拉罐所用的材料最节省，进而使厂家赢利最多．但是这样的球形易拉罐不便于消费者使用和商家运输，于是建立了茶壶式优化模型：

$$\min_{R_1, R_2, R_3>0} V_3$$

$$\text{s.t.}\ g_2(R, R_2, R_3) = 0 \tag{26}$$

应用 Lingo 编程（见附页中的程序 6）可知其最优解为

$$R_1 = 1.512\,000\ \text{cm},\quad R_2 = 2.101\,000\ \text{cm},\quad R_3 = 4.406\,790\ \text{cm}$$

以上模型是在易拉罐所用材料最省的条件下，考虑消费者使用方便和运输可行为依据，建立的优化模型．且此时茶壶的上圆缺半径近似等于下圆缺半径（即 $R_2 \approx R_3$），且趋于零时，才能使此模型取得最优解．

于是，推出了易拉罐的时尚最优化模型：

$$\min_{R_1, R_2, R_3, R_4, h_2>0} V_4(R_1, R_2, R_3, R_4, h_2)$$

$$\text{s.t.}\ g_3(R_1, R_2, R_3, R_4, h_2) = 0 \tag{27}$$

利用 Lingo 编程（见附页中的程序 7）可知其最优解为

$$R_1 = 4.000\,000\ \text{cm},\quad R_2 = 1.000\,000\ \text{cm},\quad R_3 = 1.000\,000\ \text{cm}$$

$$R_4 = 3.491\,068 \text{ cm}, \quad h_2 = 5.000\,000 \text{ cm}$$

即当此模型取得最优解时，有壶形部分上圆缺半径近似等于下圆缺半径（即 $R_2 \approx R_3$），且此时优化模型的易拉罐所用材料体积约为 $365.868\,6 \text{ cm}^3$，并且此种构造便于消费者使用，且具有良好的外形特征，但总的来说与现有的易拉罐形状和尺寸上都存在着一定的差距.

5 模型的评价、改进与推广

通过对实物的测量，得到了关于易拉罐的多组数据，并求出了其各组数据的平均值. 这为我们后面验证模型提供了现实依据. 同时我们的模型简单易懂、理解轻松，在对一个问题的解答上，我们发现最优化图形，即正圆柱体的圆柱高度是圆柱底面半径的两倍. 但是在现实中并不是这样的. 于是我们考虑了圆柱上底的造价不同于其他地方，还考虑了盖的厚度问题，运用 Lingo 编程得出的答案发现，理论值与现实测量值相符. 这就是为什么现实中的易拉罐不是正圆柱体的原因. 当在圆柱体上加了一个圆台后，让图形更加贴近了现实图形，并同样建立了两种模型，运用拉格朗日求条件极值的方法，找到了这种非线性函数下的最优解. 最后通过对模型的改进，给出了易拉罐的最优设计模型.

假如在材料上做出调整，利用强度更高的材料，那么对于罐底和罐壁之间连接角度应该做出调整，将搭接角度改小. 这是考虑了物理知识，因为比较小的搭接角度能使易拉罐的下底面积减小，进而使得来自罐内碳酸饮料的气压减小，于是可知罐底边缘是整个罐强度最大的部位. 反之，如果材料强度高的话，那么在易拉罐底部的厚度设计时又可以节省材料.

同时通过理论求解可知顶盖的厚度为其他材料厚度的 3 倍. 如果易拉罐的半径为 3 cm，则其体积为 $V = \pi 6^2 \times 12 \approx 339.3 < 355$，即装不下那么多饮料. 按照 $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{4\pi}}$，$V = 365 \text{ cm}^3$，可以算出 $r = 3.074$ cm. 粗略的计算，可以把饮料罐的体积看成两部分，一是上底半径为 3 cm，下底半径为 3.3 cm，高为 1 cm 的圆台；二是半径为 3.3 cm，高为 10.2 cm 的圆柱体. 它们的体积分别为 31.2 cm^3 和 349 cm^3，总共为 380.2 cm^3. 然后，再来通过测量重量或容积来验证. 可以认为 1 cm^3 的水和饮料的重量都是 1 g，测量结果为：未打开罐时，饮料罐重 370 g，空的罐重 15 g，装满水的饮料罐重 380 g. 这和近似计算十分接近，而且计算罐的胖的部分的直径和高的比为 $\dfrac{6.5}{10.3} = 0.631$，非常接近黄金分割. 此外，诸如底部的形状，其上拱的底面顶盖实际也不是平面的，略有上拱，顶盖实际上是由半径为 $3 + 0.4 + 0.2 = 3.6$ cm 的材料冲压而成的，从顶盖到胖的部分的斜率为 0.3，这些要求也许保证了和饮料罐的薄的部分的焊接很牢固、耐压.

对于模型的推广，相当实用. 易拉罐是一个很普通的罐装体，市场上的罐装物体甚多，形状也各式各样，让人眼花缭乱，如油桶、化妆瓶、酒瓶等. 通过所建的优化模型都能得到其形状的最优解，并可以用 Lingo 软件包进行验证. 对其实际测量数据与理论值比较，进而得出最优模型，且最优化问题在对材料的节约上也具有较强的适用性.

6 小论文：翘起“盖茨”

“给我足够长的杠杆，我可以翘起地球”，这是古时圣贤阿基米得发出的豪言壮语，而如今现在我们也毫不胆怯地说：用强大的数学知识为支点，用完备的数学模型为杠杆，我们就可以把“盖茨”翘起.

当我们踏进学校的那天，也就走进了美妙的数学之门．幼时用它数星星的自豪，儿时看见老师在黑板上列出的220除它自身之外的约数等于284，而284是除它自身外的约数之和却为220（1+2+4+5+10+11+20+44+55+110=284，284：1+2+4+71+112=220），而这样的数为友爱数，那时是多么的好奇．少年时的课外书知晓向日葵的子粒是成“斐波拉契数列”排列的．这使我感到自然与数学如此巧妙的接合是无比惊讶！而如今现在建模让我领悟到了“她”的深邃与力量.

随着科技的发展，数学发挥着越来越重要的作用，而且不断地向一些新的领域渗透，形成许多交叉学科.“高科技本质上是科学技术”的观点，已被很多人接受．在解决实际问题中，不论是用数学方法解决还是与其他交叉学科解决，首先最关键的一步是用数学语言表述的所研究的对象，即建立数学模型．在计算机迅速发展的今天，计算和建模正在成为数学向科技技术转化的主要途径.

这次我们在易拉罐形状和尺寸的最优化设计中，在测量易拉罐的数据后，计算出易拉罐的中间的直径和高的比为 6.6：10.2＝0.647．此值非常接近黄金分割点 0.618，这难道是巧合吗？非也！这肯定是原来的设计精心打造，这使眼感达到最美．这就是数学之美的巧妙运用，同时这点也使得我们对它的改进触发了灵感．但在求实际易拉罐的底的凹面时，让我感到了对物理知识的匮乏，而在其中遇到了困惑.

在经历这困惑、忧伤、灵感、突破的建模工序的过程中，我们觉得建模关键在于以下几点：

6.1 建模前（知识储备）

队员要各自储备数学知识和原来已经建立的模型，这里的汲取知识并不是要完全弄懂，只是在为看到实际问题而能联想到自己是否在什么地方看到过这类问题，而达到快速查询资料的目的.

6.2 建模中（突破瓶颈，放飞心灵）

在建模中几乎都要遇上瓶颈问题，这就需要突破，这时，需要冷静思考队员之间思想的变叉点并指正，而在模型的进一步推广时，更需要开拓我们的思想，放飞心灵，大胆构思，求实解答.

6.3 建模后（用放大镜找茬，戴显微镜改过）

因为时间仓促知识欠缺，不留意的粗心会导致建模中出现一些错误．我们的愿望就是朝最高点冲刺，而最大奢望是达到完美.

在上面的三点中我们又认为第2，第3点也是难点，这应该是所有建模乃至校科研中最美

好的期望.

我们最后寄语：

十四五年求学路，春夏秋冬伴此君
今朝有幸初露角，方晓此道远深邃
欲借君去撬“盖茨”，东风骤起念英豪

参 考 文 献

[1] 束金龙，闻人凯. 线形规划理论与模型应用[M]. 北京：科学出版社，2004

[2] 李大潜. 中国大学生数学建模竞赛[M]. 北京：高等教育出版社，2001

[3] 雷功炎. 数学模型讲义[M]. 北京：北京大学出版社，2004

[4] 谢金心，薛毅. 优化建模 Lingo/Lingo 软件[M]. 北京：清华大学出版社，2005

[5] 姜启源. 数学模型（第三版）[M]. 北京：高等教育出版社，2003

煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制模型

杨秋霞　陈　娟　谢小平

【摘　要】如何划分煤矿瓦斯等级、判断煤矿不安全程度和确定煤矿所需要的最佳通风量，对煤矿安全生产具有非常重要的意义．本文通过建立三种不同的模型并通过 Matlab 和 Lingo 编程计算分别对矿井分类问题、矿井不安全程度问题和矿井所需最佳通风量问题进行了合理解决．

在问题 1 中，首先将每日矿井绝对瓦斯涌出量、矿井相对瓦斯涌出量对时间进行正态分布检验，得出每日矿井绝对瓦斯涌出量、矿井相对瓦斯涌出量对时间符合正态分布、在稳定值附近波动的结论．从而给出计算该矿井绝对瓦斯涌出量、相对瓦斯涌出量的一般计算方法和步骤．最后，根据划分矿井瓦斯等级标准，判断该矿井为“高瓦斯矿井”．

在问题 2 中，根据瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度的关系（附表 1)，通过对数拟合，得到了瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度之间的具体函数关系式．建立煤尘爆炸与煤尘浓度的模糊隶属度函数，给出矿井不安全可能性的模糊统计评判模型，并用 Matlab 软件编程计算得到该矿井的不安全程度为 4.63%．

在问题 3 中，首先根据瓦斯浓度、煤尘浓度与风速的关系，找出安全生产前提下采煤工作面实际需要的最小风量．通过 Matlab 编程计算得到，采煤工作面 1 和采煤工作面 2 实际所需最小风量分别为 385.10 m^3/min 和 531.08 m^3/min．根据各井巷风量的分流情况以及对各井巷中风速的具体要求，建立了煤矿实际所需最佳通风量的单目标最优化模型．采用 Lingo 软件求解，得出该矿井局部通风机的额定风量和煤矿所需要的最佳（总）风量分别为 150 m^3/min 和 1 491.18 m^3/min．

最后，通过模型求解和分析知，本文对不同问题的建模方法合理，对煤矿公司等高风险的企业管理具有较强的借鉴作用．

【关键词】数据挖掘　均值检验　模糊统计方法　优化模型

1　问题重述

1.1　基本情况

煤矿安全生产是我国目前亟待解决的问题之一，做好井下瓦斯和煤尘的监测与控制是实现安全生产的关键．

瓦斯是一种无毒、无色、无味的可燃气体，其主要成分是甲烷，在矿井中它通常从煤岩

裂缝中涌出. 瓦斯爆炸需要三个条件：空气中瓦斯达到一定的浓度；足够的氧气；一定温度的引火源.

煤尘是在煤炭开采过程中产生的可燃性粉尘. 煤尘爆炸必须具备三个条件：煤尘本身具有爆炸性；煤尘悬浮于空气中并达到一定的浓度；存在引爆的高温热源. 试验表明，一般情况下煤尘的爆炸浓度是 30～2 000 g/m^3，而当矿井空气中瓦斯浓度增加时，会使煤尘爆炸下限降低.

国家《煤矿安全规程》给出了煤矿预防瓦斯爆炸的措施和操作规程，以及相应的专业标准. 规程要求煤矿必须安装完善的通风系统和瓦斯自动监控系统，所有的采煤工作面、掘进面和回风巷都要安装甲烷传感器，每个传感器都与地面控制中心相连，当井下瓦斯浓度超标时，控制中心将自动切断电源，停止采煤作业，人员撤离采煤现场.

1.2　需要解决的问题

现按照煤矿开采的实际情况考虑下列问题：

问题 1：根据《煤矿安全规程》第一百三十三条的分类标准（见附件 2），鉴别该矿是属于“低瓦斯矿井”还是“高瓦斯矿井”.

问题 2：根据《煤矿安全规程》第一百六十八条的规定，并参照附表 1，判断该煤矿不安全的程度（即发生爆炸事故的可能性）有多大？

问题 3：如果为了保障安全生产，利用两个可控风门调节各采煤工作面的风量，通过一个局部通风机和风筒实现掘进巷的通风. 根据附图 1 所示各井巷风量的分流情况，对各井巷中风速的要求（见《煤矿安全规程》第一百零一条），以及瓦斯和煤尘等因素的影响，确定该煤矿所需要的最佳（总）通风量，以及两个采煤工作面所需要的风量和局部通风机的额定风量（实际中，井巷可能会出现漏风现象）.

注意：掘进巷需要安装局部通风机，其额定风量一般为 150～400 m^3/min. 局部通风机所在的巷道中至少需要有 15%的余裕风量（新鲜风）才能保证风在巷道中的正常流动，否则，可能会出现负压导致乏风逆流，即局部通风机将乏风吸入并送至掘进工作面.

2　问题背景

煤矿安全生产是目前社会重点关注的热点问题之一，尤其是在能源紧张，对煤炭的需求量不断增加的情况下，煤矿的安全生产问题更是值得我们关注，这也是建设平安和谐社会的重要组成部分. 据不完全统计，2005 年全国煤矿发生事故 405 起，死亡 2 157 人. 瓦斯事故死亡人数占全国煤矿事故总死亡人数的 36.0%. 在 58 起一次死亡 10 人以上的特大事故中，瓦斯事故 40 起，占 69%. 一次死亡百人以上的事故 5 起. 这些事故所造成的经济损失是重大的，给社会和伤亡人员的家庭所造成影响与损失是无法估量的. 我们注意到，大部分事故的罪魁祸首都是瓦斯或煤尘爆炸，瓦斯在煤矿的开采中是不可避免的. 因此，矿井下的瓦斯和煤尘对煤矿的安全生产构成了重大威胁，做好煤矿井下瓦斯和煤尘的监测与控制是保证煤矿安全生产的关键所在.

3 模型假设

模型假设：

（1）采煤工作面 1 与采煤工作面 2 的每天的采煤量相同，早、中、晚班的采煤速率相同.

（2）假设附表 2 中的监测数据能准确反映监测点的实际情况，数据是真实可靠的.

（3）煤层的瓦斯涌出速率和煤尘的生成速率基本稳定.

（4）假定工作区域、掘井区域、回风巷区域以及总回风巷区域的瓦斯浓度、煤尘浓度是均匀的.

（5）假设早班、中班、晚班的工作时间相同，均为 8h.

（6）假设漏风很小，可以忽略.

（7）假设局部通风机不会在此过程中发生机械故障.

4 符号约定及名词解释

4.1 符号约定

Q'_{ijk} —— 矿井第 i 个工作面第 j 天第 k 班的绝对瓦斯涌出量；

Q'_{ij} —— 矿井中第 i 个工作面第 j 天平均绝对瓦斯涌出量；

（$i=1,2,3$，$i=3$ 为掘进工作面，单位：m^3/min）

q_i —— 矿井中第 i 个工作面相对瓦斯涌出量；

Q_{ijk} —— 矿井第 i 个工作面第 j 天第 k 班的风量；

C_{ijk} —— 矿井第 i 个工作面第 j 天第 k 班风流中平均瓦斯浓度；

A_i —— 月平均日产量；

V —— 风流的速度；

S —— 工作面的横截面积；

W —— 该煤矿需要的通风量；

W_i —— 该煤矿各巷道需要的通风量，$i=1\sim3$ 分别表示采煤工作面 1、采煤工作面 2、主巷道的风量；

M —— 局部通风机的额定风量；

S_1 —— 主巷道断面面积；

S_2 —— 其他各采煤区的进风巷和回风巷以及掘进巷的断面面积；

S_3 —— 局部通风机的风筒的断面面积.

4.2 名词解释

（1）采煤工作面：矿井中进行开采的煤壁（采煤现场）.

（2）掘进巷：用爆破或机械等方法开凿出的地下巷道，用以准备新的采煤区和采煤工作面.

（3）掘进工作面：掘进巷尽头的开掘现场.

（4）新鲜风：不含瓦斯和煤尘等有害物质的风.

（5）乏风：含有一定浓度的瓦斯和煤尘等有害物质的风流.

（6）绝对瓦斯涌出量：单位时间涌出的瓦斯体积，单位为 m^3/d 或 m^3/min. 矿井绝对瓦斯涌出量计算公式：

$$Q_g = \frac{Q \times C}{100},\quad (Q = V \times S)$$

（7）相对瓦斯涌出量：平均日产一吨煤同期所涌出的瓦斯量，单位是 m^3/t. 矿井相对瓦斯涌出量计算公式：

$$q_g = \frac{Q_g}{A}$$

5　问题分析

5.1　问题 1 的分析

本问题是根据《煤矿安全规程》第一百三十三条的分类标准，鉴别该矿井是属于"低瓦斯矿井"还是"高瓦斯矿井". 矿井瓦斯等级主要是根据矿井相对瓦斯涌出量和绝对瓦斯涌出量划分的，其分类标准见表 1：

表 1　矿井瓦斯等级分类表

矿井瓦斯等级	矿井相对瓦斯涌出量	矿井绝对瓦斯涌出量
低瓦斯矿井	$\leqslant 10\ m^3/t$	$\leqslant 40\ m^3/min$
高瓦斯矿井	$> 10\ m^3/t$	$> 40\ m^3/min$

由表 1 可知，低瓦斯矿井的相对瓦斯涌出量小于或等于 $10\ m^3/t$，且矿井绝对瓦斯涌出量小于或等于 $40\ m^3/min$，而高瓦斯矿井的相对瓦斯涌出量大于 $10\ m^3/t$ 或矿井绝对瓦斯涌出量大于 $40\ m^3/min$.

一个矿井中只要有一个煤（岩）层发现瓦斯，该矿井即为瓦斯矿井，瓦斯矿井必须依据矿井瓦斯等级进行分级管理. 其中重要的两个因素是矿井相对瓦斯涌出量和矿井绝对瓦斯涌出量. 关于绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量的定义如下：

绝对瓦斯涌出量 Q_g 为单位时间涌出的瓦斯体积，单位为 m^3/d 或 m^3/min，即 $Q_g = \frac{Q \times C}{100}$，其中，$Q$ 为风量，C 为风流中的平均瓦斯浓度.

相对瓦斯涌出量 q_g 为平均日产一吨煤同期所涌出的瓦斯量，单位是 m^3/t，即 $q_g = \frac{Q_g}{A}$，其

中，Q_g为绝对瓦斯涌出量（m^3/d），A 为日产量.

根据绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量的定义和矿井各监测点提供的风速、瓦斯浓度和煤尘浓度的监测数据表，计算出矿井内两个采煤工作面的绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量，参照矿井瓦斯等级分类表 1，判别该矿井属于“低瓦斯矿井”还是“高瓦斯矿井”.

5.2 问题 2 的分析

问题 2 将参照附表 1，并根据《煤矿安全规程》第一百六十八条的规定，判断该煤矿不安全的程度（即发生爆炸事故的可能性）有多大？此问题的关键在于判断在哪些情况下有发生爆炸的可能.

由“附件 1”和《煤矿安全规程》的相关信息，可以知道煤矿安装了瓦斯自动监控系统和通风系统. 瓦斯监控系统要求所有的采煤工作面和回风巷及部分进风巷都要设置安装瓦斯传感器，每个传感器都与地面控制中心相连，当井下瓦斯浓度超标时，控制中心将自动切断电源，停止采煤工作，人员撤离采煤现场. 所以在正常情况下，瓦斯的浓度是远低于它的爆炸下限 5%，故瓦斯发生爆炸的可能性很小.

考虑到随着瓦斯浓度的升高，煤尘爆炸下限浓度急剧下降，故我们应重点考虑煤尘发生爆炸的可能性.

空气中瓦斯浓度和煤尘爆炸下限浓度直接影响煤矿安全生产，根据瓦斯浓度对煤尘爆炸下限的影响（见表 2），可以得出瓦斯浓度与煤尘爆炸的下限浓度的关系，并判断各考察点是否为爆炸点.

表 2

空气中的瓦斯浓度%	0	0.50	0.75	1.0	1.50	2.0	3.0	4.0
k	1	0.75	0.60	0.50	0.35	0.25	0.1	0.05

因此，本文将从两个方面来考虑矿井的危险性. 一方面，煤尘爆炸往往是由瓦斯爆炸引起的；另一方面，有煤尘参与时，小规模的瓦斯爆炸可能演变为大规模的爆尘瓦斯爆炸事故，可能会酿成严重后果. 最后结合这两种情况综合考虑矿井不安全的可能性.

5.3 问题 3 的分析

本问题为在保证矿井安全生产，即矿井不发生爆炸和燃烧的前提下，求矿井所需的最小（最佳）总通风量. 由《煤矿安全规程》第一百零三条，矿井所需风量应符合本规定对风流中有关瓦斯浓度、煤尘浓度的要求.

由煤矿开采的实际情况不难得知，在满足各种约束条件的前提下，该煤矿所需要的最佳（总）通风量，为两个采煤工作面、一个掘进工作区和主巷道所需最低风量之和.

采煤工作面实际需要风量可以由安全生产的瓦斯浓度和煤尘浓度确定，即工作面所需最低风量是瓦斯浓度降到最接近瓦斯爆炸下限之下的风量.

在确定掘进工作面所需最低风量的时候，由于局部通风机所在的巷道中至少需要有 15% 的余裕风量（新鲜风）才能保证风在巷道中的正常流动，因此，到达掘进工作面的风量最多为主巷道风量的 85%.

6　模型的建立与求解

6.1　问题 1 的模型建立

由于只有采煤工作面和掘进工作面才有煤炭生产及瓦斯涌出，根据瓦斯的相对和绝对涌出量的定义，我们只需考虑采煤工作面和掘进工作面相对瓦斯涌出量和绝对瓦斯涌出量.

利用 Spss 软件对每日矿井绝对瓦斯涌出量、矿井相对瓦斯涌出量对时间进行正态分布检验（附录三），结果表明每日矿井绝对瓦斯涌出量、矿井相对瓦斯涌出量对时间符合正态分布，在稳定值附近波动.

因此，由附表 2 所提供的该矿井各监测点的风速、瓦斯浓度和煤尘浓度的监测数据，我们提出下列方法及步骤分别计算出工作面 1 和工作面 2 的绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量，具体步骤如下：

第一步：分别计算一天中的早、中、晚班的绝对瓦斯涌出量，然后求平均，计算出当天的平均绝对瓦斯涌出量.

第 i 个工作面第 j 天第 k 班的绝对瓦斯涌出量：

$$Q'_{ijk}=\frac{Q_{ijk}\times C_{ijk}}{100},\quad (i=1,2;\ j=1,2,\cdots,30,\ k=1,2,3) \tag{1}$$

第 i 个工作面第 j 天的平均绝对瓦斯涌出量：

$$Q'_{ij}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}Q_{ijk} \tag{2}$$

第二步：求一个月中各天的平均绝对瓦斯涌出量的最大值，即第 1 个工作面一个月中每天的平均绝对瓦斯涌出量的最大值为

$$\overline{Q_i}=\max_{1\leqslant j\leqslant 30}\{Q'_{ij}\},\quad (i=1,2) \tag{3}$$

第三步：根据前面关于各工作面每日煤产量相同的假设，求出第 1 个工作面和第 2 个工作面的日平均煤产量：

$$\overline{A}_1=\overline{A}_2=\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}\frac{1}{2}\times A_i \tag{4}$$

第四步：根据第二步和第三步计算得到的 $\overline{Q_i}$，$\overline{A}_i\,(i=1,2)$，我们可以求出第 i 个工作面的相对瓦斯涌出量：

$$q_i=\frac{1440\times\overline{Q_i}}{2\times\overline{A}_i},\quad (i=1,2) \tag{5}$$

最后，根据煤矿瓦斯等级分类表 1 和上面对绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量的计算结果，可以给出该煤矿瓦斯等级的判断结论.

6.2　模型 1 的求解

根据模型 1 中公式（1）～（5），我们可以利用 Matlab 软件分别计算出各采煤工作面的绝

对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量，程序见附录一，具体结果见表 3.

表 3 采煤工作面的绝对（相对）瓦斯涌出量

瓦斯涌出量指标 \ 工作面	采煤工作面 1	采煤工作面 2
绝对瓦斯涌出量	3.941 0	4.979 8
相对瓦斯涌出量	9.45	11.78

由表 3 可知，采煤工作面 2 的相对瓦斯涌出量 $q_2 > 10$，故该矿井为高瓦斯矿井．由于掘进工作面瓦斯浓度和风量远小于工作面 1 和工作面 2，本文没有再考虑掘进工作面的相对瓦斯涌出量和绝对瓦斯涌出量的必要．

6.3 问题 2 的模型建立

根据《煤矿安全规程》第一百六十八条规定，在考虑矿井不安全的可能性时，我们必须同时考虑瓦斯的爆炸浓度、报警浓度、断电浓度和复电浓度．由于矿井爆炸的原因有两个：瓦斯爆炸和煤尘爆炸，而矿井空气中瓦斯浓度增加时，会使煤尘爆炸下限降低（结果见本题中附表 1），因此，我们首先寻找瓦斯浓度的煤尘爆炸浓度下限范围的关系．具体分析步骤如下：

第一步：根据附表 1 画出空气中瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度范围（左端点，右端点）的散点图，如图 1 所示．

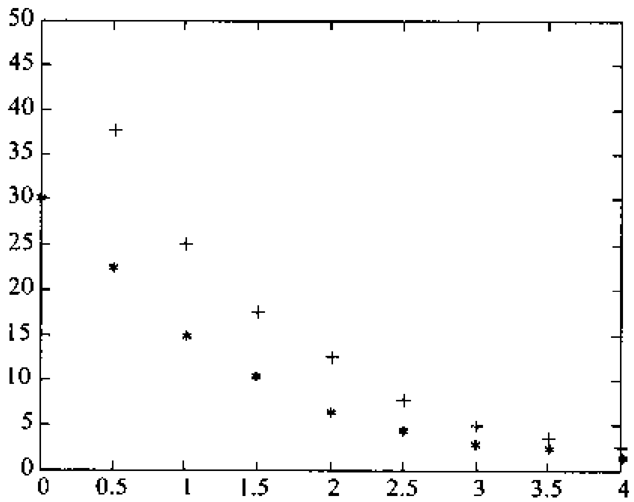


图 1 空气中瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度散点图

第二步：散点图趋势分析及函数拟合．从图 1 可以看出，该散点图呈内凹的趋势．我们可以根据煤尘爆炸下限浓度（左端点、右端点）随空气中瓦斯浓度的数据分别对其进行了 2 次非线性拟合（程序见附录四（3））和对数拟合（程序见附录四（2）），并根据残差平方和大小选择最佳拟合函数．剔除奇异点之后，二次非线性拟合中煤尘爆炸下限浓度的左端点值的残差平方和为 3.328 6，右端点值的残差平方和为 7.580 1；对数拟合中煤尘爆炸下限浓度的左端点值的残差平方和为 3.300 7，右端点的残差平方和为 2.914 8，因此，关于煤尘爆炸下限浓度左端点和右端点的对数拟合是最佳拟合，拟合函数分别为：

煤尘爆炸下限浓度左端点值关于瓦斯浓度的函数 y_1 为

$$y_1 = e^{-0.7547c+3.4394} \tag{6}$$

煤尘爆炸下限浓度右端点值关于瓦斯浓度的函数 y_2 为：

$$y_2 = e^{-0.7721c+3.9817} \tag{7}$$

y_1，y_2 的拟合曲线如图 2 所示.

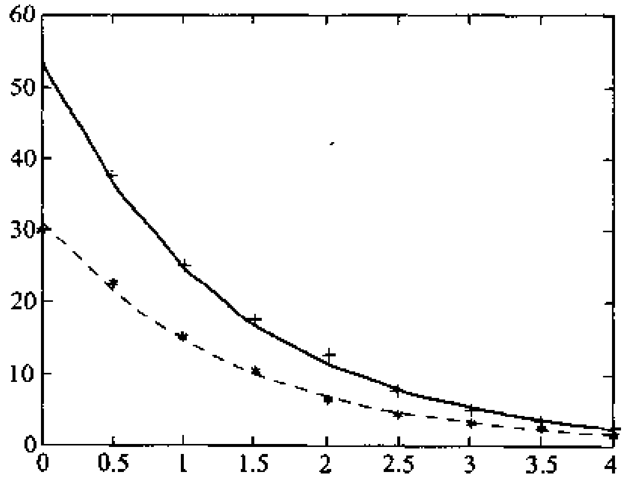


图 2　空气中瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度的拟合曲线

从本题中附表 1 和关于瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度（左端点、右端点）的拟合函数可知，对于任意给定的瓦斯浓度，煤尘爆炸下限浓度皆有一定的取值范围. 因此，我们利用模糊统计的方法，首先建立一个关于某瓦斯浓度下煤尘是否爆炸的模糊隶属度函数；然后根据该函数确定各天各班次各工作点煤尘爆炸的程度，从而确定该矿井煤尘爆炸的可能性. 具体步骤如下：

第一步：建立模糊隶属度函数，设空气中瓦斯浓度为 c 时，煤尘爆炸浓度为 y，且煤尘爆炸下限浓度范围为 $y_1 \sim y_2$，则相应的模糊隶属度函数为：

$$f(c) = \begin{cases} 0, & c < y_1 \\ \dfrac{c - y_1}{y_2 - y_1}, & y_1 < c < y_2 \\ 1, & c > y_2 \end{cases} \tag{8}$$

第二步：设可能发生爆炸对象个数为 n，相应的瓦斯浓度和煤尘浓度分别记为 (c_1, y_1)，(c_2, y_2)，…，(c_n, y_n)，则煤矿不安全的可能性 p 为

$$p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \tag{9}$$

6.4　问题 2 的模型求解

从本题附表 2 中的监测数据可知，各观察点，在任意一天的任意工作时段的瓦斯浓度都远未达到瓦斯爆炸的程度. 因此，对于瓦斯而言，仅需根据《煤矿安全规程》第一百六十八条的规定判定各个考察点在任意天任意工作时段报警、断电、复电等事故的发生与否，并进一步统计出各个考察点在 30 天内发生报警、断电、复电的总次数（见表 4）；同时，矿井爆炸

的可能性仅需考虑相应的煤尘浓度．利用（9）式计算，可得 $p = 25/(6\times30\times3) = 4.63\%$．

表 4 各个工作面的报警、断电、复电次数表

次数 \ 监测点	工作面 1	工作面 2	掘进工作面	回风巷 1	回风巷 2
报警	0	5	0	0	20
断电	0	0	0	0	20
复电	0	0	0	0	12

6.5 问题 3 的模型建立

由《煤矿安全规程》第一百零三条，矿井所需风量应符合本规定对风流中有关瓦斯浓度、煤尘浓度的要求．而由煤矿开采的实际情况，不难得知在满足各种约束条件的前提下，该煤矿所需要的最佳（总）通风量为两个采煤工作面、一个掘进工作面和主巷道所需最小风量之和．因此，我们首先求出两个采煤工作面所需要的实际风量．具体步骤如下：

第一步：根据《煤矿安全规程》规定，按采煤工作面回风巷中瓦斯浓度不超过 1%的要求，并按照瓦斯绝对涌出量计算采煤工作面所需要的最小风量

$$W_i = 100\times q_{采}\times k_{采}，(i = 1, 2) \tag{10}$$

式中，W_i 表示采煤工作面 1、采煤工作面 2 实际需要风量，$q_{采}$ 表示采煤工作面回风巷风流中日平均瓦斯绝对涌出量，$k_{采}$ 表示采煤工作面瓦斯涌出不均衡系数，100 为采煤工作面回风流中瓦斯浓度不超过 1%所换算的常数．

第二步：对于采煤工作面 1、工作面回风巷风流中日平均瓦斯绝对涌出量可以利用 EXCEL 电子表格算出正常生产条件下，连续观测一个月的月平均日瓦斯绝对涌出量 $q_{采} = 3.655\,4\ \text{m}^3/\text{min}$．

采煤工作面瓦斯涌出不均衡系数可以利用 EXCEL 电子表格计算

$$k_{采} = \frac{\text{最大日瓦斯绝对涌出量}}{\text{月平均日瓦斯绝对涌出量}} = \frac{3.997\,36}{3.794\,5} = 1.053\,5 \tag{11}$$

所以采煤工作面 1 所需风量

$$W_5 = 100\times3.655\,4\times1.053\,5 = 385.10 \tag{12}$$

第三步：对于采煤工作面 2，同理可以计算：

采煤工作面 2 所需风量

$$W_6 = 100\times4.694\,8\times1.131\,2 = 531.08 \tag{13}$$

第四步：考虑风量对煤尘浓度的影响．

由于有采煤工作面回风巷中瓦斯浓度不超过 1%的规定，所以由附表 1（瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度的关系表）可知，当空气中瓦斯浓度不超过 1%时，煤尘爆炸下限浓度的最小值为 15 g/m^3，然而从附表 2（各监测点的风速，瓦斯和煤尘的监测数据表）知，在采煤工作面的煤尘浓度最大值为 8.42 g/m^3，远小于瓦斯浓度不超标时的煤尘爆炸下限浓度．所以，在正

常生产情况下，风量对煤尘浓度影响不大，即只要瓦斯浓度不超标，煤尘浓度绝对不会达到爆炸下限，我们不考虑风量对煤尘浓度的影响．故采煤工作面 1 和采煤工作面 2 所需风量分别是 385.10 m^3/min，531.08 m^3/min．

为了保证安全生产及符合经济要求，确定该煤矿所需要的最佳（总）通风量，除了采煤工作面 1 和采煤工作面 2 所需风量外，还要考虑掘进工作面和主巷道所需的风量，因此根据《煤矿安全规程》第一百零一条建立了相关的优化模型 4：

$$\min \quad W=\left(\sum_{i=1}^{3}W_i+M\right)\times 1.2$$

$$\text{s.t}\quad \begin{cases}0.25\times 60<W_1/S_2<6\times 60\\ 0.25\times 60<W_2/S_2<6\times 60\\ 0.15\times 60<W_3/S_1\\ 150<M<400\\ M<W_3\times 0.85\\ W/S_1<8\\ 0.15\times S_2\times 60<M<4\times S_2\times 60\end{cases} \tag{14}$$

说明：根据实际瓦斯绝对涌出量可以得到采煤工作面 1 和采煤工作面 2 的所需风量，我们可以知道，进入采煤工作面所需风量不得低于采煤工作面的所需风量．对于约束条件 5，由于至少要有 15%的余裕风量在巷道中，所以可能会出现负压乏风逆流．

6.6　问题 3 的求解

按照瓦斯绝对涌出量可以计算采煤工作面所需要的风量，其结果为采煤工作面 1 和采煤工作面 2 所需风量分别为 385.10 m^3/min 和 531.08 m^3/min．

模型 4 是一个多约束条件的最优化问题模型，利用 Lingo 编程得到最佳通风量 $W=$ 1 491.18 m^3/min，局部通风机的额定风量为 150 m^3/min，程序和结果见附录七．

7　模型的结果分析

7.1　模型 1 的结果分析

根据煤矿瓦斯等级鉴定方法和计算公式，由附表 2 所提供的数据，通过 Matlab7.0 编写程序算出结果，可以发现采煤工作面 2 的相对瓦斯涌出量超出了分类标准（大于 10 m^3/t），所以，我们可以根据《煤矿安全规程》第一百三十三条的分类标准得知该矿井为高瓦斯矿井．

我们又运用了第二种方法（Excel）处理数据并计算绝对瓦斯涌出量以及相对瓦斯涌出量得出了工作面 1、工作面 2 以及掘进工作面的绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量的值，发现与第一种方法的计算结果吻合，处理表格见附录二．同时将每日矿井绝对瓦斯涌出量、矿井相对瓦斯涌出量对时间进行正态分布检验，发现每日矿井绝对瓦斯涌出量、矿井相对瓦斯涌出

量对时间符合正态分布，在稳定值附近波动，均值检验见附录三.

7.2 模型 2 的结果分析

通过 Matlab7.0 编写程序拟合出瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度之间的函数关系式，计算出监测点的煤尘下限浓度．为此建立了模糊统计模型，得到所有的煤尘下限浓度均大于实际测得的煤尘含量的结果．据此我们认为煤尘爆炸的可能性为 0，再根据所求出的报警次数与可能发生爆炸点总和之比，计算出爆炸的可能性为 4.63%．由此得出该煤矿的不安全程度很低.

7.3 模型 3 的结果分析

运用 Lingo8.0 编写程序得到的最佳通风量，保证了矿井内瓦斯浓度小于它的上限值 1%，煤尘含量低于它的爆炸下限，这样既保证了安全生产，而且还合乎经济要求．因此，我们计算出的结果是合理的.

8 模型的评价与推广

8.1 模型的评价

我们从各个问题的出发点，分析了应该考虑的各种情况，建立了四个不同模型，并进行了理论论证和实践论证．从而证明，我们建立的数学模型能较好地解决问题．此模型的最大好处在于模型极为广泛的使用性.

8.1.1 模型的优点

（1）建立的模型能与实际紧密联系，结合实际情况对所提出的问题进行求解，使模型更贴近实际，通用性、推广性较强.

（2）模型 1 中，我们利用 Spss 软件和 Excel 软件对数据进行了验证，从而确保了模型建立的合理性.

（3）在模型 2 中，我们利用模糊统计方法，统计出所有监测点的可能发生的爆炸次数，更为准确地估计了煤矿的不安全程度.

（4）利用数学工具和 Matlab、Lingo 编程的方法，严格地对模型求解，具有科学性.

（5）本文对模型的合理性以及算法进行了讨论，为模型的推广和解决同类型问题提供有价值的参考.

8.1.2 模型的缺点

（1）在模型建立中，我们只考虑了影响矿井安全生产的几个主要因素，忽略了其他因素的影响，使得结果可能存在一定的误差.

（2）曲线拟合是研究因变量与自变量之间变动比例关系的一种方法，最终结果一般是建立某种经验性的曲线方程，使计算结果与实际数据存在一定的偏差.

8.2 模型的推广

本文所建立的四个模型可以分别去判定一个煤矿是低瓦斯煤矿还是高瓦斯煤矿、安全程度以及最经济和安全条件下的最佳通风量问题．我们建立模型的方法和思想对其他类似的煤矿问题也很实用，基本囊括了几种优秀的数据挖掘方法．

本模型中的煤矿安全问题是我国目前亟待解决的问题之一，所以我们做的安全评价和最经济生产条件下的各项监测与控制可以推广到煤矿企业中．进一步建立安全指标体系，并应用改进式层次分析法对各指标作权重处理；运用模糊评判模型，对煤矿企业进行安全评价．据此再给出系统整体的安全状况评价结果可对安全管理具有很大的意义．

参 考 文 献

[1] 王凡．模糊数学与工程科学．哈尔滨：哈尔滨船舶工程学院出版社，1988

[2] 王彩华，宋连天．模糊论方法学．北京：中国建筑工业出版社，1998

[3] 侯光文．教育评价概论．石家庄：河北教育出版社，1996

[4] 侯定丕，张淑林．评估方法论的几个问题．北京：中国高等教育评估，1998（2）

[5] 张跃，邹寿平，宿芬编著．模糊数学方法及其应用．北京：煤炭工业出版社，1992

[6] 姜启源．数学模型（第三版）．北京：高等教育出版社，2003

[7] 赵静，但琦．数学建模与数学实验．北京：高等教育出版社，2000

煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制模型

尹 东 李 莎 罗 洪

【摘 要】本文是研究煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制问题，而控制的关键在于对通过监测数据找到通风量与瓦斯、煤尘浓度的关系．对于问题 1，运用 Matlab 7.0 以及相关公式，计算出绝对涌出量 5.415 3 m^3/min 和两个工作面的相对涌出量，分别为 12.871 5 m^3/t 和 12.953 3 m^3/t，再与高、低瓦斯矿井的判断标准作比较，判断该矿井为高瓦斯矿井．对问题 2 的求解应由矿井瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度关系（附表 1）进行二次多项式拟合，并结合各监测点的风速、瓦斯浓度和煤尘的监测数据表（附表 2），运用概率统计知识和 Matlab 7.0 对其求解得出了安全度评价模型，得到了该煤矿的不安全程度，大小为 24.03%．对于问题 3，利用风速、瓦斯浓度、煤层浓度之间的相互关系，建立了最佳通风量的最优化模型．运用 Lingo 软件，求解得矿井最佳通风量为 1 221.650 m^3/min；工作面 1 所需要的风量为 501.849 4 m^3/min；局部通风机的额定风量为 235.080 9 m^3/min；工作面 2 所需要的风量为 484.720 1 m^3/min．

【关键词】矿井安全度 绝对涌出量 相对涌出量 模型

1 问题重述

近几十年来，我国煤矿瓦斯爆炸事故时有发生，它已成为我国煤矿安全的头号大敌，因此，做好井下瓦斯和煤尘的监测与控制是实现安全生产的首要任务．瓦斯的主要成分是甲烷，在煤炭开采过程中，它通常从煤岩裂缝中涌出．在空气中，瓦斯达到一定的浓度，若在足够的氧气和一定温度的引火源之下，将会发生爆炸．另外，煤尘的爆炸也是我国煤矿安全事故的主要因素．试验表明，一般情况下煤尘的爆炸浓度是 30～2 000 g/m^3，而当矿井空气中瓦斯浓度增加时，煤尘爆炸下限将降低，结果如附表 1 所示．国家《煤矿安全规程》给出了煤矿预防瓦斯爆炸的措施和操作规程，以及相应的专业标准（见附件 2）．规程要求煤矿必须安装完善的通风系统和瓦斯自动监控系统，所有的采煤工作面、掘进面和回风巷都要安装甲烷传感器，每个传感器都与地面控制中心相连，当井下瓦斯浓度超标时，控制中心将自动切断电源，停止采煤作业，人员撤离采煤现场．

参看附图 1 并结合附表 2 的监测数据，根据实际情况解决下列问题：

问题 1：根据《煤矿安全规程》第一百三十三条的分类标准（见附件 2），鉴别该矿是属于“低瓦斯矿井”还是“高瓦斯矿井”？

问题 2：根据《煤矿安全规程》第一百六十八条的规定，并参照附表 1，判断该煤矿不安

全的程度（即发生爆炸事故的可能性）有多大？

问题 3 为了保障安全生产，利用两个可控风门调节各采煤工作面的风量，通过一个局部通风机和风筒实现掘进巷的通风（见下面的注）．根据附图 1 所示的各井巷风量的分流情况、对各井巷中风速的要求（见《煤矿安全规程》第一百零一条），以及瓦斯和煤尘等因素的影响，确定该煤矿所需要的最佳（总）通风量，以及两个采煤工作面所需要的风量和局部通风机的额定风量（实际中，井巷可能会出现漏风现象）．

2 符号说明及模型假设

2.1 符号说明

Q_g——矿井绝对瓦斯涌出量（单位：m^3/min）；

q_g——矿井相对瓦斯涌出量（单位：m^3/t）；

Q——风量（单位：m^3/min）；

C——风流中平均瓦斯浓度（单位：%）；

A——月平均日产量（单位：t/d）；

S——工作面的横截面积（单位：m^2）；

Z——矿井所需最佳通风量（单位：m^3/min）；

x_i——煤矿各巷道所需通风量（单位：m^3/min）；

A_q——不安全概率；

$Q_g(j)$——第 j 个监测点的绝对涌出量（单位：m^3/min）；

$Q_g(i,j)$——第 j 个监测点第 i 个班次的绝对涌出量（单位：m^3/min）；

$q_g(i,j)$——第 j 个监测点第 i 个班次的相对涌出量（单位：m^3/t）；

$q_g(j)$——第 j 个监测点的相对涌出量（单位：m^3/t）；

mc_j——第 j 个监测点的煤尘浓度（单位：g/m^3）；

2.2 基本假设

（1）采煤工作面 1 与采煤工作面 2 每天的生产进度相同．

（2）矿井各巷道发生爆炸只与瓦斯浓度、煤尘浓度有关，与其他因素无关．

（3）瓦斯的主要成分是甲烷，因此甲烷浓度按瓦斯浓度计算．

（4）矿井中各井巷不漏风．

（5）在监测的一个月中没有发生爆炸，全部数据有效．

（6）瓦斯浓度、煤尘浓度与风速有关．

3 模型的分析、建立与求解

3.1 模型 1

3.1.1 问题 1 分析

通过对题目所给数据的分析，以及《煤矿安全规程》第一百三十三条的分类标准：① 低瓦斯矿井：矿井相对瓦斯涌出量小于或等于 10 m^3/t，且矿井绝对瓦斯涌出量小于或等于 40 m^3/min；② 高瓦斯矿井：矿井相对瓦斯涌出量大于 10 m^3/t．或矿井绝对瓦斯涌出量大于 40 m^3/min，我们可以根据数据求出矿井绝对瓦斯涌出量以及相对瓦斯涌出量，并对照《煤矿安全规程》进行比较，就可以判断该矿井是属于“低瓦斯矿井”还是“高瓦斯矿井”.

3.1.2 模型的建立

此问题是判断该煤矿是属于“低瓦斯矿井”还是“高瓦斯矿井”. 首先，我们必须求出矿井绝对瓦斯涌出量，再利用矿井绝对瓦斯涌出量中的最大涌出量，通过求解及单位的转换得到我们需要的矿井相对瓦斯涌出量. 然后，与《煤矿安全规程》第一百三十三条的分类标准进行比较，便判断出该矿井是属于“低瓦斯矿井”还是属于“高瓦斯矿井”.

（1）求矿井瓦斯的绝对涌出量.

设绝对涌出量为 Q_g（m^3/min），且有

$$绝对涌出量 = 井巷风量 \times 空气中瓦斯浓度/100$$
$$井巷风量 = 井巷风速 \times 巷道断面面积$$

对题目中所给附表 2 的数据进行分析，可直接得出“空气中瓦斯浓度 C（%）”、“井巷风速 V（m/s）”，也可从附图一中得到“巷道断面面积 S（m^2）”，于是得到第 i 个监测点的绝对涌出量的公式：

$$Q_g(j)=\frac{(V\times 60)\times S\times C}{100},\qquad (j=1,\cdots,6) \tag{1}$$

由一个月 30 天，每天有早、中、晚三个班次，对每天每个班次绝对涌出量计算后得到其中一个监测点的最大绝对涌出量 $\max Q_{g1}$. 又因为附表 2 中给出了 6 个监测点的数据，所以我们对矿井绝对涌出量有如下计算公式：

$$Q_g=\sum_{j=1}^{6}\max\frac{Q_g(j)}{6} \tag{2}$$

（2）求矿井瓦斯的相对涌出量.

设相对涌出量为 q_g（m^3/t），且有

$$相对涌出量 = 绝对涌出量/日产量$$

① 根据算出的绝对涌出量 Q_g（m^3/min），可以找出所给月份煤矿的平均日产量 A（t/d），因此，可直接得出相对涌出量的表达式：

$$q_g=\frac{1\,440\times Q_g}{A} \tag{3}$$

② 计算一个月中每个监测点每天每个班次的绝对涌出量

$$Q_g(i,j),\qquad (i=1,\cdots,90;\ j=1,\cdots,6)$$

再由每一个绝对涌出量，按公式（3）算出每个监测点每天每个班次的相对涌出量

$$q_g(i, j)=\frac{1\,440\times Q_g(i, j)}{A}, \quad (i=1,\cdots,90;\ j=1,\cdots,6) \tag{4}$$

《煤矿安全规程》中第一百三十四条规定在低瓦斯矿井中，如果相对瓦斯涌出量大于 10 m³/t，则判断为高瓦斯面．再按高瓦斯矿井管理，取每个检测点的瓦斯相对涌出量的最大值．又考虑到煤矿涌出瓦斯的本质，我们把监测瓦斯相对涌出量的标准放在采煤工作面 1 和采煤工作面 2 上，最终得到相对涌出量的表达式：

$$q_g=\max(q_g(1)+q_g(2)) \tag{5}$$

3.1.3　模型的求解

根据附表 2 中的数据，按公式(1)和公式(2)，利用 Matlab 编程(见程序附页 program1.m)，计算得 $Q_g=5.415\,3$ （m³/min）.

利用 Q_g 按公式（3）得到模型 ① 关于矿井瓦斯相对涌出量的解 $q_g=12.871\,5$ （m³/t）.

用模型 ② 的方法求解得 $q_g=12.953\,3$ （m³/t）.

3.1.4　模型的结果

绝对涌出量：$Q_g=5.415\,3\ \text{m}^3/\text{min}<40\ \text{m}^3/\text{min}$.

相对涌出量：① $q_g=12.871\,5\ \text{m}^3/\text{t}>10\ \text{m}^3/\text{t}$.

② $q_g=12.953\,3\ \text{m}^3/\text{t}>10\ \text{m}^3/\text{t}$.

根据《煤矿安全规程》第一百三十三条的分类标准：（1）低瓦斯矿井：矿井相对瓦斯涌出量小于或等于 10 m³/t 且矿井绝对瓦斯涌出量小于或等于 40 m³/min；（2）高瓦斯矿井：矿井相对瓦斯涌出量大于 10 m³/t 或矿井绝对瓦斯涌出量大于 40 m³/min；所以该矿属于高瓦斯矿井.

3.2　模型 2

3.2.1　问题 2 分析

要判断煤矿的不安全程度（即发生爆炸事故的可能性），必须找到评价它的指标．从各监测点的风速、瓦斯和煤尘的监测数据表中，可以看出它们服从正态分布．根据《煤矿安全规程》第一百六十八条的规定，在工作面、掘进面及回风巷中，当瓦斯浓度大于等于 1.0%时，甲烷传感器将发生报警．于是我们可以利用概率统计的方法，求出一个月中瓦斯浓度大于报警浓度的概率，即不安全程度的大小．并且根据瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度的关系式（见表 1），确定在一定瓦斯浓度下煤层的爆炸下限浓度，由此来判断煤层的不安全程度的大小．

表 1　瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度关系

空气中瓦斯浓度（%）	0	0.5	1.0	1.5	2.0
煤尘爆炸下限浓度（g/m³）	30～50	22.5～37.5	15～25	10.5～7.5	6.5～12.5
空气中瓦斯浓度（%）	2.5	3.0	3.5	4	
煤尘爆炸下限浓度（g/m³）	4.5～7.5	3～5	2.5～3.5	1.5～2.5	

3.2.2 模型的建立

根据在模型的分析中已经提到当采煤工作面中瓦斯浓度大于 1.0%时，甲烷传感器便自动报警，那么，对于该问题中要讨论的该煤矿的不安全程度，我们将对采煤工作面中瓦斯浓度大于 1.0%的数据进行筛选．又因为这些数据服从正态分布 $N(\mu, \delta^2)$，其密度函数为

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{6}$$

由此可见，利用该密度函数公式，运用 Matlab 7.0 进行编程，考虑到该煤矿共有六个井巷，以及早、中、晚三班不同瓦斯浓度与煤尘浓度，进行画图，但由于所涉及的数据较多，在这里我们只画出了其中一个工作面的正态分布图像，如图 1 所示，其他的图像可以类似得到．

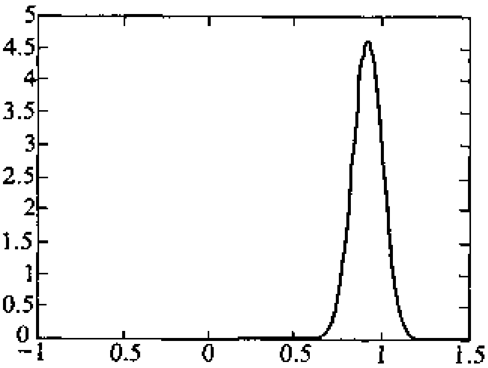


图 1　工作面 1 的瓦斯浓度分布

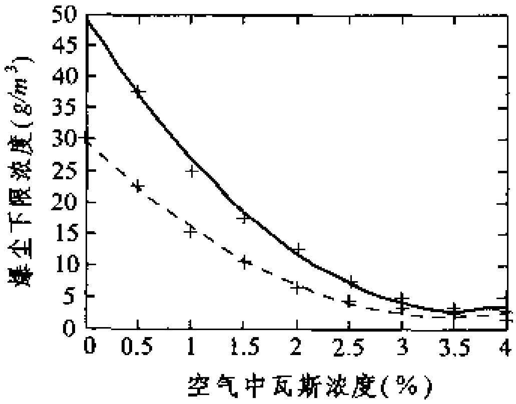


图 2　瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度关系

由附表 1 中的数据可以知道瓦斯浓度与煤尘爆炸下限成反函数，并对其进行二次多项式拟合．令二次曲线的关系表达式为

$$mC=aC^2+bC+d \tag{7}$$

可以得到瓦斯浓度与煤尘的关系图（见图 2）．根据所拟合的图像，得到了两条曲线的方程：

$$\left.\begin{aligned} mC_1&=2.2875\times C^2-15.9429\times C+29.6000\\ mC_2&=3.6450\times C^2-25.9801\times C+49.1939\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

式中，mC_1 表示煤尘浓度下限的底线，mC_2 表示煤尘浓度下限的高限．其中煤尘的爆炸下限为两条曲线与 $C=0$，$C=4$ 构成的区域．

3.2.3 模型的求解

（1）从煤尘角度考虑：

分析附表 2 中的数据，瓦斯浓度均小于 1.5%，煤尘浓度均小于 9 g/m^3，对照瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度关系，当空气中瓦斯浓度为 1.5 时，煤尘爆炸下限浓度为 10.5～17.5 g/m^3．因此当从煤尘浓度考虑安全度时，实际煤尘浓度远小于煤尘爆炸下限浓度，此时的不安全度为 0．

（2）从瓦斯浓度考虑：

根据《煤矿安全规则》第一百六十八条的规定，矿井各巷道当 CH_4 浓度大于等于 1.0%时，将发生报警现象，我们考虑此时矿井处于不安全状态．根据概率统计和 Matlab 7.0 编程，求得各井巷的瓦斯浓度平均值、方差及安全概率，如表 2 所示．

表 2

项目＼井巷	工作面 1	工作面 2	掘进工作面	回风巷 1	回风巷 2	总回风巷
瓦斯浓度均值	0.673 1	0.873 8	0.229 7	0.723 6	0.922 7	0.625 9
方差(σ)	0.037 4	0.084 2	0.043 1	0.038 7	0.086 5	0.035 7
安全概率 p_i	1.000 0	0.933 1	1.000 0	1.000 0	0.814 2	1.000 0

根据表 2 可以发现工作面 1、掘进工作面、回风巷 1、总回风巷的安全概率为 100%，即不安全度为 0．于是，由工作面 2 和回风巷 2 可算得安全概率为 p_2 和 p_5．又从附表 2 中得知，该月工作面 2 和回风巷 2 的安全情况分为四种：用“0”代表安全，“1”代表不安全（见表 3）．

表 3

工作面 2	回风巷 2
0	0
1	0
0	1
1	1

不安全度表示为

$$A_q = 1 - p_2 \times p_5 \tag{9}$$

式中，p_2 表示工作面 2 的安全概率，p_5 表示回风巷的安全概率．代入数据求得该煤尘不安全度：

$$A_q = 1 - p_2 \times p_5 = 1 - 0.933\,1 \times 0.814\,2 = 0.240\,3$$

3.3　模型 3

3.3.1　问题 3 的分析

该模型的建立涉及煤尘与风速关系和瓦斯浓度与风速关系的拟合．首先，瓦斯浓度在新鲜空气中的爆炸界限一般为 5%～16%，高于或低于爆炸界限遇火均不发生爆炸．其次，煤尘爆炸下限浓度一般为 30～50 g/m^3．于是预防煤矿瓦斯爆炸的方法只有监测和控制井下瓦斯的浓度．降低井下瓦斯浓度的唯一方法就是利用通风系统将瓦斯排出井外．从降低瓦斯浓度的角度考虑，风速越大越好．但是井下风速过大，将会增加巷道空气中的煤尘浓度，不但影响工人的正常工作和健康，更会因为煤尘浓度过高遇火引起爆炸．

要得到该煤矿所需要的最佳通风量，以及两个采煤工作面所需要的风量和局部通风机的额定风量，就需要我们根据附图 1 所示各井巷风量的分流情况，将各井巷中风速的要求（见《煤矿安全规程》第一百零一条），以及瓦斯和煤尘等因素的影响，作为目标约束条件，建立一个优化模型并进行求解，进而得到我们所需要的结果．

3.3.2　模型的建立

根据分析，考虑到各井巷风量的分流情况，对各井巷中风速的要求，以及瓦斯和煤尘等因素的影响，我们建立了如下的单目标优化模型：

（1）目标函数.

$$\text{通风量最佳：}\min\ Z=\sum_{i=1}^{3}X_i \tag{10}$$

（2）约束条件.

① 对井巷点的约束：

a. 对风速的约束：

$$\text{s.t}\begin{cases}0.25<V_1<4\\0.25<V_2<4\\0.15<V_3<4\\0.25<V_4<6\\0.25<V_5<6\\0.15<V_6<4\end{cases} \tag{11}$$

b. 对瓦斯浓度的约束：

$$C_j=\frac{Q_g(j)}{X_j+Q_g(j)}<0.1\%,\qquad (j=1,\cdots,4) \tag{12}$$

c. 对煤尘的约束：

$$mC_j<15\,(\mathrm{g/m^3}),\qquad (j=1,\cdots,6) \tag{13}$$

$$\text{s.t}\begin{cases}mC_1=2.0281\times V_1+3.1183\\mC_2=1.1917\times V_2+5.1456\\mC_3=1.8997\times V_3+3.0805\\mC_4=1.3158\times V_4+4.7097\\mC_5=0.5082\times V_5+6.1650\\mC_6=0.2636\times V_6+5.6967\end{cases} \tag{14}$$

② 对局部通风机所在巷道的约束：

$$\begin{cases}V_3=m\times X_3/(4-0.04)/60\\m<1-15\%\end{cases} \tag{15}$$

（3）目标函数说明：

目标函数在满足约束条件的情况下，该煤矿井巷中所需要的总通风量达到最佳，$X_i(i=1,2,3)$ 表示两个工作面和一个掘进面所需要的风量.

（4）约束条件说明：

约束条件 ① 中（11）式表明各巷道必须满足其风速的要求（其中 V_1 表示工作面 1 进风巷的风速；V_2 表示工作面 2 进风巷的风速；V_3 表示掘进面进风巷的风速；V_4 表示工作面 1 回风巷的风速；V_5 表示工作面 2 回风巷的风速；V_6 表示掘进巷的风速；C_1 表示工作面 1 的瓦斯浓度；C_2 表示工作面 2 的瓦斯浓度；C_3 表示掘进面进风巷的瓦斯浓度；C_4 表示总回风巷的浓度）.（12）式表明各巷道各班次满足瓦斯浓度的限制，以及瓦斯浓度与风速的关系，详细说明将在模型的求解中给出；（13）式表明各巷道各班次满足煤尘的限制.

3.3.3 模型的求解

由于矿井中各个巷道早、中、晚班的风速、瓦斯浓度、煤尘含量都各不相同，所以处理

起来比较麻烦，因此我们提出将各个巷道按风速大小相同进行统一处理，并运用 Matlab 7.0 进行编程计算出各个巷道这一个月中的最大风速（显然，只要这一个月中的最大风速满足约束条件，那么其他风速都满足要求），这样就减少了一些复杂度.

有了上述简化，这个问题就转化为一个单纯的多目标多约束的优化问题，这样就有了现成的算法和软件来解决．首先，我们用 Matlab 7.0 拟合了瓦斯浓度与风速的关系（见图 3）.

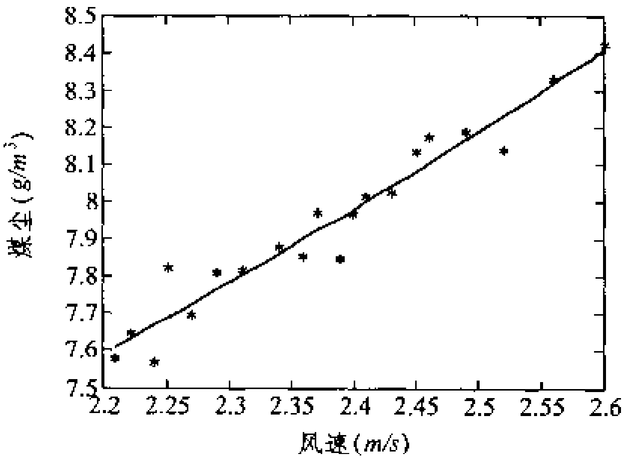


图 3　煤尘与风速关系图

由图 3 可知，煤尘与风速大小关系的函数表达式为

$$MC_1 = 2.028\,1 \times V_1 + 3.118\,3 < 15\ (\mathrm{g/m^3}) \tag{16}$$

运用 Lingo 8.0 对上述模型求解就可以得到：

煤矿最佳通风量：	1 221.650 m^3/min；
采区工作面 1 所需要的风量：	501.849 4 m^3/min；
采区工作面 2 所需要的风量：	484.720 1 m^3/min；
局部通风机的额定风量：	235.080 9 m^3/min.

4　结果的分析与检验

对于模型 1 中求解相对涌出量的两个方法来说，方法 ① 比方法 ② 显得更简单．方法① 是直接根据算出的绝对涌出量再利用公式便求得结果，其值为 $q_g = 12.871\,5$（m^3/t）；而方法 ② 是在计算了每个监测点每天每个班次的绝对涌出量后，再通过每个绝对涌出量算出每个监测点每天每个班次的相对涌出量，最后取采煤工作面 1 和采煤工作面 2 两监测点全部相对涌出量的最大值．显然这样计算较为麻烦，但是所得到的相对涌出量的值更具有真实意义和说服力，其结果为 $q_g = 12.953\,3$（m^3/t）．与方法 ① 所得结果相差甚微，而且均大于低瓦斯矿井标准 10（m^3/t）．两个方法得到的结果的一致性使得我们的判断更有力.

对于模型 3，所得结果：

煤矿最佳通风量：	1 221.650 m^3/min；
采区工作面 1 所需要的风量：	501.849 4 m^3/min；

采区工作面 2 所需要的风量：　484.720 1 m^3/min；

局部通风机的额定风量：　235.080 9 m^3/min.

我们主要从此通风量下的煤尘浓度、瓦斯浓度、风流速度三方面对结果进行分析与检验：

V（1）	2.091 039	MC（1）	7.359 137
V（2）	2.019 667	MC（2）	7.552 437
V（3）	0.459 169 2	MC（3）	3.952 784
V（4）	2.106 850	MC（4）	7.481 893
V（5）	2.038 009	MC（5）	7.200 716
V（6）	0.464 362 4	MC（6）	5.819 106
C（1）	0.750 429 3 E-02	C（2）	0.900 000 0E-02
C（3）	0.522 142 6E-02	C（4）	0.900 000 0E-02

以上数据是编程求解的部分结果，根据以上数据我们可以得到以下结论（见表 4）：

表 4

	工作面 1	工作面 2	掘进面	回风巷 1	回风巷 2	掘进巷
煤尘浓度	7.359 137	7.552 437	3.952 784	7.481 893	7.200 716	5.819 106
瓦斯浓度	0.750 429 3	0.90	0.522 142 6	0.750 429 3	0.90	0.90
风流速度	2.091 039	2.019 667	0.459 169 2	2.106 850	2.038 009	0.464 362 4

将表 4 中数据与附表 2 所给的数据进行比较可以知道，在模型 3 中，掘进面的风量速、瓦斯浓度、煤尘浓度均减小，即是在原来的基础上增加了掘进面的风量.

5 模型的评价与改进

5.1 模型的优点

（1）使用显著性假设检验使表达式更准确.

（2）min（max）函数的使用，使在讨论安全度爆炸问题时更加合理.

（3）对于整个模型，结构紧凑、简单明了、通俗易懂.

（4）本文的基本模型中所使用的多目标优化方法为矿井所需要的通风量提供了一种可行方案，且优化模型解决了煤尘与瓦斯浓度对该矿安全度的影响.

（5）在第 2 问中，巧妙地运用正态分布，建立合理的模型，将该煤矿不安全程度较为准确地求解出来. 通过合适的拟合，对以后的矿井作业安全防范做出更好的预测，能通过合理的方式对未来做出较好的预测.

5.2 模型的缺点

在第 2 问的不安全度求解中，我们应该从更多方面去考虑模型的影响因素，更加完善我们的模型.

5.3 模型的改进

我们在文章开头的假设中提到“矿井各巷道发生爆炸只与瓦斯浓度、煤尘浓度有关，与其他因素无关”，这为我们建立和求解带来了极大的方便，同时也忽略了实际煤矿井中最佳通风量受到其他因素的影响．如工作面温度、工人所需供氧量等．我们需要按它们的规定分别进行计算，然后取其最大值．可参照《煤矿安全规程》第一百零六、一百零七、一百零八及一百一十条的法定标准，规定工作面及回流瓦斯浓度小于等于 1%；容许风速 0.25～5 m/s；空气温度小于等于 26°C；工作地点每人供风量大于等于 4 m^3/min．

基本风量：$Q_1 = 60 \times V \times S$（即未考虑上述所求得的最佳总风量）；

考虑工作面温度调整系数：$Q_2 = K_1Q_1$（K_1 为温度调整系数；Q_2 为考虑工作面温度后所需风量）；

按人数计算：$Q_3 = 4 \times N$（N 为工作面的工人数；Q_3 为考虑工人所需风量）；

目标函数：$Q' = \max Q_i$（$i = 1，2，3$）（Q' 表示考虑上述因数后求得的最佳通风量）．

很显然通过考虑这些因数的影响后，所取得的最佳通风量将更为合理．

此模型改进后，还可用于油库的安全监测与控制、燃气类的库存管理等，以掌握不安全度，来防止易燃易爆类物品造成的重大危险事故和对人员造成人身伤害．

参考文献

[1] 姜启源．数学模型（第三版）[M]．北京：高等教育出版社，2003

[2] 赵静．数学建模与数学实验（第三版）[M]．北京：高等教育出版社，2000

[3] 孙荣恒．应用概率论（第二版）[M]．北京：科学出版社，2006

[4] 苏金明．Matlab 实用教程[M]．北京：电子工业出版社，2005

[5] 杨启帆．数学建模竞赛[M]．杭州：浙江大学出版社，2005

第二部分

相关课题研究论文

高校教学质量评估数学模型

廖 灿

【摘 要】在属性测度空间和有序分割类概念的基础上，按照置信度准则建立属性识别理论模型，并在建立了教师教学质量水平评价指标体系的基础上，运用成对比较矩阵求权向量的特征根法确定了各指标的权重．进一步将属性综合评价法分层应用于教师教学质量水平的评价之中，科学准确地对教师的教学质量水平作出了评价．通过实例说明了该数学模型是有效的．

【关键词】置信度准则 评价指标体系 属性综合评价法

1 引 言

教师教学质量水平的高低直接影响着学生掌握知识与技能的多少．因此客观、公正、科学地评价任课教师的教学质量水平是至关重要的．它不仅能保证课堂教学质量的提高，而且还能够提高教师的教学积极性．文[1～4]中运用层次分析法、模糊动态聚类分析法、统计回归等多种方法对教师的教学质量进行了评价．然而决定一名教师的教学质量水平的因素并不是单一的，而是包含以下诸多方面：教学态度、教学内容、教学方法、教学效果等．上述每个因素又可分为几个具体的子因素，例如教师的教学态度又可具体分为教师是否认真钻研教材和教法、认真备课、耐心细致地及时辅导和及时答疑等六个方面．针对评价教师教学质量水平的因素较多，且每个因素又分为若干个子因素这一特点，下面采用了文[5～8]的方法 —— 属性综合评价法来解决这一问题，从而达到分层评价与总体评价的自然衔接．

2 属性集和属性可测空间

2.1 属性集和属性集运算

设 X 为研究对象的全体，称为对象空间．F 为 X 中元素的某类属性称为属性，空间或最大属性集．属性空间 F 中的任何一种情况都称为一个属性集．

对于属性集可以定义属性集运算．A 与 B 的和 $A\cup B$ 表示“或者有 A 属性或者有 B 属性”；A 与 B 的交 $A\cap B$ 表示“既有 A 属性，又有 B 属性”；A 与 B 的差 $A-B$ 表示“有 A 属性而没有

B 属性"；A 的余集 $\overline{A}$ 表示"不具有 A 属性"．属性集中的空集定义为"不具有任何属性"，记为 $\varnothing$。例如：$A-A=\varnothing$，$A\bigcap\overline{A}=\varnothing$．对于多个属性集 A 的和与交分别用符号 $\bigcup_i A_i$ 与 $\bigcap_i A_i$ 表示．$\bigcup_i A_i$ 表示"至少具有 A_i 中的一个属性"；$\bigcap_i A_i$ 表示"具有所有 A_i 的属性"．关于通常集合运算的关系式对属性集也一样成立如：$A-B=A\bigcap\overline{B}$，$\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcap\overline{B}$

2.2 属性代数和属性 σ 代数

为了研究属性集和属性集之间的关系，我们必须研究由 F 的一些属性集构成的集合 β．如果 β 满足以下三个条件：

（1）$A\in\beta$；

（2）如果 $A\in\beta$，则 $\overline{A}\in\beta$；

（3）如果 $A\in\beta$，$B\in\beta$，则 $A\bigcup B\in\beta$．

那么称 β 为属性代数．属性代数的意义是：对属性代数中的属性集，余运算、有限和运算、有限交运算皆封闭．

设 β 为属性代数，如果 β 还满足：对 $A_i\in\beta$（$i=1，2，3，\cdots$），有 $\bigcup_i A_i\in\beta$，则称 β 为属性 σ 代数，称（$F，\beta$）为属性可测空间．

2.3 属性测度和属性测度空间

设 x 为 X 中的一个元素，A 为一个属性集．用"$x\in A$"表示"x 具有属性 A"．"$x\in A$"仅是一种定性的描述，更有用的是定量地刻画"x 具有属性 A"的程度．用一个数来表示"$x\in A$"的程度，这个数记为 $\mu(x\in A)$ 或 $\mu_x(A)$，称它为 $x\in A$ 的属性测度．为方便起见，要求属性测度在[0，1]之内取值．

对于不同的属性集都可以给出相应的属性测度，但是这些属性测度不可以任意给，必须满足一定的规则．

设（$F，\beta$）为属性可测空间，称 μ_x 为（$F，\beta$）上的属性测度，如果 μ_x 满足：

$$\mu_x(A)\geqslant 0,\quad \forall A\in\beta \tag{1}$$

$$\mu_x(F)=1 \tag{2}$$

若 $A_i\in\beta$，$A_i\bigcap A_j=\varnothing$（$i\neq j$），则

$$\mu_x\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_x(A_i) \tag{3}$$

称（$F，\beta，\mu_x$）为属性测度空间．

2.4 属性空间的分割和有序分割类

设 F 为 X 上某类属性空间，$C_1，C_2，C_3，\cdots，C_k$ 为属性空间中的 K 个属性集．如果 $C_1，C_2，C_3，\cdots，C_k$ 满足：$F=\bigcup_{i=1}^{K}C_i$，$C_i\bigcap C_j=\varnothing$（$i\neq j$），则称（$C_1，C_2，C_3，\cdots，C_k$）为属性空

间 F 的分割.

在有些情况下，属性集和属性集之间是可“比较”的，对有些属性集可建立“强”序或“弱”序. 当属性集 A 比属性集 B“强”时，记为 $A>B$；当 A 比 B“弱”时，记为 $A<B$. 当然，“强”与“弱”是相对的，从一个角度认为是“强”的，从相反的角度则认为是“弱”的. 如何确定“强”与“弱”由具体问题确定.

如果（C_1，C_2，C_3，…，C_k）为属性空间 F 的分割，并且 $C_1>C_2>C_3>\cdots>C_k$ 或 $C_1<C_2<C_3<\cdots<C_k$，则称（C_1，C_2，C_3，…，C_k）为有序分割类.

3 属性识别准则

3.1 问 题

设（C_1，C_2，C_3，…，C_k）是属性空间 F 的一个有序分割类，x 属于 C_i 类的属性测度为 $\mu_x(C_i)$，满足：$\sum_{i=1}^{K}\mu_x(C_i)=1$. 已知：$\mu_x(C_i)$（$1\leqslant i\leqslant K$），如何判别 x 属于哪一类 C_i?

3.2 置信度准则

设（C_1，C_2，C_3，…，C_k）是属性空间 F 的一个有序分割类，λ 为置信度，当 $C_1>C_2>C_3>\cdots>C_k$ 时，

$$k_0=\min\{k:\ \sum_{i=1}^{k}\mu_x(C_i)\geqslant\lambda,\ 1\leqslant k\leqslant K\} \tag{4}$$

当 $C_1<C_2<C_3<\cdots<C_k$ 时，

$$k_0=\min\{k:\ \sum_{i=1}^{k}\mu_x(C_i)\geqslant\lambda,\ 1\leqslant k\leqslant K\} \tag{5}$$

则认为 x 属于 C_{k_0} 类.

置信度准则是从“强”的角度考虑的，即认为越“强”越好. 而且“强”的类应占相当大的比例，置信度取值范围通常为 $0.5<\lambda<1$，一般取 0.6 与 0.7 之间.

4 权向量的确定

4.1 成对比较矩阵和权向量

假设要比较一层 n 个因素 I_1，I_2，I_3，…，I_n 对上层一个因素 O 的影响，每次取两个因素 I_i 和 I_j，用 a_{ij} 表示 I_i 和 I_j 对 O 的影响之比，全部比较结果可用成对比较矩阵

$$A=(a_{ij})_{n\times n},\quad a_{ij}>0,\quad a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}} \tag{6}$$

表示．根据 a_{ij} 的特点，A 称为正互反矩阵．显然有 $a_{ii}=1$．一般地，如果一个正互反矩阵 A 满足 $a_{ij}\times a_{jk}=a_{ik}$（$i$，$j$，$k$=1，2，…，$n$），则称为一致性矩阵．$n$ 阶一致阵 A 有下列性质：

（1）A 的秩为 1，A 的唯一非零特征根为 n.

（2）A 的任一列向量都对应于特征根 n 的特征向量.

如果得到的成对比较矩阵是一致阵，自然应取特征根 n 的归一化的特征向量来表示诸因素 I_1，I_2，I_3，…，I_n 对上层因素 O 的权重．这个向量称为权向量．如果成对矩阵不是一致矩阵，但在不一致的容许范围内，Satty 等人建议用对应于 A 的最大特征根（记作λ）的特征向量（归一化后）作为权向量 w，即 w 满足

$$Aw=\lambda w \tag{7}$$

直观地看，因为矩阵 A 的特征根和特征向量连续依赖于矩阵的元素 a_{ij}，所以当 a_{ij} 离一致性的要求不远时，A 的特征根和特征向量也与一致阵的相差不大．（7）式表示的方法称为由成对比较矩阵求权向量的特征根法.

4.2　比较尺度

当比较两个可能具有不同性质的因素 I_i 和 I_j 对于一个上层因素 O 的影响时，Saaty 等人提出用 1～9 尺度，即 a_{ij} 的取值范围是 1，2，3，…，9 及其互反数 1，$\frac{1}{2}$，…，$\frac{1}{9}$．在进行定性的成对比较时，人们头脑中通常有五种明显的等级，用 1～9 尺度可以方便地表示．如表 1 所示.

表 1

尺　度	含　义
1	I_i 与 I_j 的影响相同
3	I_i 比 I_j 的影响稍强
5	I_i 比 I_j 的影响强
7	I_i 比 I_j 的影响明显的强
9	I_i 比 I_j 的影响绝对的强
2，4，6，8	I_i 比 I_j 的影响之比在上述两个相邻等级之间
1，$\frac{1}{2}$，…，$\frac{1}{9}$	I_i 比 I_j 的影响之比为上面 a_{ij} 的互反数

4.3　一致性检验

应用$\lambda-n$ 数值的大小来衡量 A 的不一致程度，Saaty 将

$$\mathrm{CI}=\frac{\lambda-n}{n-1} \tag{8}$$

定义为一致性指标．当 CI = 0 时，A 为一致阵；CI 越大，A 的不一致程度就越严重．为了确定 A 的不一致程度的容许范围，需要找出衡量 A 的一致性指标 CI 的标准．Saaty 又引入所谓随机

一致性指标 RI（计算过程详见[1]）. 随机一致性指标 RI 的数值如表 2 所示.

表 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

将一致性指标 CI 与同阶的随机一致性指标 RI 之比称为一致性比率 CR. 当

$$\mathrm{CR}=\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{RI}}<0.1 \tag{9}$$

时，认为 A 的不一致程度在容许范围之内，可用其特征向量归一化后作为权向量. 此过程称为一致性检验.

4.4 组合权向量及组合一致性检验

对于三个层次的决策问题，若第一层只有 1 个因素，第 2 层、第 3 层有 n, m 个因素，记第 2 层、第 3 层对第 1 层、第 2 层的权向量分别为

$$\boldsymbol{w}^{(2)}=(w_1^{(2)},\cdots,w_n^{(2)})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{w}_i^{(3)}=(w_{i1}^{(3)},\cdots,w_{ik_i}^{(3)})^{\mathrm{T}}$$（其中 K_i 表示第 2 层中第 j 个因素下的子因素的个数）

以 $\boldsymbol{w}_i^{(3)}$ 为列向量构成矩阵

$$\boldsymbol{W}^{(3)}=(\boldsymbol{w}_1^{(3)},\cdots,\boldsymbol{w}_n^{(3)}) \tag{10}$$

则第 3 层对第 1 层的组合权向量为

$$\boldsymbol{w}^{(3)}=\boldsymbol{W}^{(3)}\boldsymbol{w}^{(2)} \tag{11}$$

一般地，若共有 s 层，则最下层对最上层的组合权向量为

$$\boldsymbol{w}^{(s)}=\boldsymbol{W}^{(s)}\boldsymbol{W}^{(s-1)}\cdots\boldsymbol{W}^{(3)}\boldsymbol{w}^{(2)} \tag{12}$$

组合一致性检验可逐层进行. 若第 p 层的一致性指标为 $\mathrm{CI}_1^{(p)}$， $\mathrm{CI}_2^{(p)}$， …， $\mathrm{CI}_n^{(p)}$（n 是第 $p-1$ 层因素的数目），随机一致性指标为 $\mathrm{RI}_1^{(p)}$， $\mathrm{RI}_2^{(p)}$， …， $\mathrm{RI}_n^{(p)}$，定义

$$\mathrm{CI}^{(p)}=(\mathrm{CI}_1^{(p)},\mathrm{CI}_2^{(p)},\cdots,\mathrm{CI}_n^{(p)})\boldsymbol{w}^{(p-1)} \tag{13}$$

$$\mathrm{RI}^{(p)}=(\mathrm{RI}_1^{(p)},\mathrm{RI}_2^{(p)},\cdots,\mathrm{RI}_n^{(p)})\boldsymbol{w}^{(p-1)} \tag{14}$$

则第 p 层的组合一致性比率为

$$\mathrm{CR}^{(p)}=\frac{\mathrm{CI}^{(p)}}{\mathrm{RI}^{(p)}},\quad (p=3,4) \tag{15}$$

若 $\mathrm{CR}^{(p)}=\dfrac{\mathrm{CI}^{(p)}}{\mathrm{RI}^{(p)}}<0.1$，则第 p 层通过一致性检验.

若上一层的每个因素都支配着下一层的所有因素，则此层次结构称为完全的. 反之为不完

全的．此时我们将不支配的那些因素的权向量分量简单地置 0，然后用完全层次结构的办法来处理．

5 评分准则

问题 3：设$(C_1, C_2, C_3, \cdots, C_K)$是属性空间 F 的一个有序分割类，x_1 的属性测度为 $\mu_{x_1}(C_i)$，x_2 的属性测度为 $\mu_{x_2}(C_i)$，满足 $\sum_{i=k}^{K}\mu_{x_1}(C_i)=\sum_{i=k}^{K}\mu_{x_2}(C_i)=1$．已知 $\mu_{x_1}(C_i)$ 和 $\mu_{x_2}(C_i)$，如何比较 x_1 和 x_2？

由于属性集 C_i 之间有强弱的关系，可以用分数表示属性集的强弱关系．强属性集的分数比弱属性集的分数大．设属性集 C_i 的分数为 n_i，当 $C_1<C_2<C_3<\cdots<C_K$ 时，有 $n_1<n_2<n_3<\cdots<n_K$．反之，当 $C_1>C_2>C_3>\cdots>C_K$ 时，有 $n_1>n_2>n_3>\cdots>n_K$．称

$$q_x=\sum_{i=1}^{K}n_i\mu_x(C_i) \tag{16}$$

为 x 的分数．评分准则：若 $q_{x_1}>q_{x_2}$，则认为 x_1 比 x_2 强，记为 $x_1>x_2$．

6 一类属性识别模型

6.1 已知指标分类标准的属性识别模型

在研究对象空间 X 取 n 个样品 x_1，x_2，…，x_n．对每个样品要测量 m 个指标 I_1，I_2，I_3，…，I_m，第 i 个样品 x_i 的第 j 个指标 I_j 的测量值为 x_{ij}．第 i 个样品可以表示为一个向量 $x_i=(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im})$ $(1\leqslant i\leqslant n)$．设 F 为 X 上某类属性空间，$(C_1, C_2, C_3, \cdots, C_K)$ 为属性空间 F 的有序分割类，且满足 $C_1>C_2>C_3>\cdots>C_K$．每个指标的分类标准已知，写成分类标准矩阵为

$$\begin{array}{ccccc} & C_1 & C_2 & \cdots & C_K \\ I_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ I_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mK} \end{array}$$

其中 a_{jK} 满足 $a_{j1}<a_{j2}<\cdots<a_{jK}$ 或者 $a_{j1}>a_{j2}>\cdots>a_{jK}$．

问题 4：已知 $x_i=(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im})$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 和分类标准矩阵，如何判别 x 属于哪一类 C_K？如何比较 x_i？

下面进行分析. 关键是计算样品的属性测度，然后根据置信度准则就可以回答上述问题了.

6.2 样品属性测度的计算

首先来计算第 i 个样品指标值 x_{ij} 具有属性 C_k 的属性测度 $\mu_{ijk}=\mu(x_{ij}\in C_k)$. 不妨假定 $a_{j1}>a_{j2}>\cdots>a_{jK}$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } x_{ij}\geqslant a_{j1}\text{ 时，取 }\mu_{ij1}=1,\ \mu_{ij2}=\cdots=\mu_{ijK}=0\\ \text{当 } x_{ij}\leqslant a_{jK}\text{ 时，取 }\mu_{ijK}=1,\ \mu_{ij1}=\cdots=\mu_{ijK-1}=0\\ \text{当 } a_{jl}\geqslant x_{ij}\geqslant a_{jl+1}\text{ 时，取 }\mu_{ijl}=\dfrac{|x_{ij}-a_{jl+1}|}{|a_{jl}-a_{jl+1}|},\quad \mu_{ijl+1}=\dfrac{|x_{ij}-a_{jl}|}{|a_{jl}-a_{jl+1}|}\\ \mu_{ijk}=0,\ k<l\text{ 或 }k>l+1\end{array}\right\}\tag{17}$$

在知道第 i 个样品的各指标测量值的属性测度之后，现在计算第 i 个样品 x 的属性测度 $\mu_{ik}=\mu(x_i\in C_k)$. 指标共有 m 个，每个指标的重要性可能相同，也可能不相同. 因此，要考虑指标权 $(w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_m)$，$w_j\geqslant 0$，$\sum_{j=1}^{m}w_j=1$. 由指标权可得到属性测度

$$\mu_{ik}=\mu(x_i\in C_k)=\sum_{j=1}^{m}w_j\mu_{ijk},\quad 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant K$$

有了属性测度，就可以进行识别和比较分析.

按照置信度准则对置信度 λ 计算

$$k_i=\min\{k:\ \sum_{l=1}^{k}\mu_{xi}(C_l)\geqslant\lambda,\ 1\leqslant k\leqslant K\}\tag{18}$$

则认为 x_i 属于 C_{ki} 类.

7 在教学质量评价中的应用

7.1 教学质量评价指标体系

教学质量评估应包含的主要内容：教学态度、教学内容、教学方法、教学效果等，这里假设教师的教学质量评价指标体系如表 3 所示.

表 3

教学质量水平	教学态度 I_1	你觉得教师是否认真钻研教材和教法、认真备课? I_{11}
		在教学过程中做到既关心学生的学习感受，又严格要求学生的情况 I_{12}
		教师做到及时批改、讲评作业 I_{13}
		教师做到耐心细致地及时辅导和及时答疑 I_{14}
		教师在教学过程中做到教书育人、为人师表 I_{15}
		教师上课准时，无迟到早退，无教学事故发生 I_{16}

续表 3

教学质量水平	教学内容 I_2	教师的教学讲授生动、表达清楚 I_{21}
		教师的教学讲授思路清晰、逻辑性条理性强 I_{22}
		板书板画规范、美观 I_{23}
		精通教学内容，知识面宽广 I_{24}
		教师教学过程中概念清楚、观点正确 I_{25}
		教师教学过程中重点难点突出 I_{26}
		专业知识渊博，注重传授新知识和学科发展动态 I_{27}
	教学方法 I_3	教师在教学过程中做到因材施教 I_{31}
		教师教学过程中注重引导、启发思维、深入浅出 I_{32}
		教师与学生的双向交流及时、渠道通畅 I_{33}
		教学内容丰富，理论联系实际 I_{34}
		辅助教学手段（比如多媒体技术）应用恰当且熟练 I_{35}
		讲授专业名词术语时能同时用英语表述 I_{36}
	教学效果 I_4	教师的教学使我们对该学科的兴趣提高了 I_{41}
		教师的教学使我理解并学会了该课程内容 I_{42}
		教师的教学使我认识和解决问题的能力提高了 I_{43}
		教师的教学使我学会了该学科的学习方法 I_{44}
		教师在作业上给出的指导及反馈很有价值 I_{45}

7.2 权重的确定

依据层次分析法常用的 1～9 尺度[1]建立的总目标教学质量 A，教学态度 B_1，教学内容 B_2，教学方法 B_3，教学效果 B_4 的成对比较矩阵如下：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1/3 & 1/5\\ 1/3 & 1 & 1/3 & 1/4\\ 3 & 3 & 1 & 1/3\\ 5 & 4 & 3 & 1\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1/3 & 1 & 1 & 1/8\\ 1 & 1 & 1/4 & 1 & 2 & 1/7\\ 3 & 4 & 1 & 3 & 6 & 1/5\\ 1 & 1 & 1/3 & 1 & 5 & 1/7\\ 1 & 1/2 & 1/6 & 1/5 & 1 & 1/8\\ 8 & 7 & 5 & 7 & 8 & 1\end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1/3 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 3 & 5 & 5 & 5\\ 2 & 1/2 & 1/3 & 1 & 3 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1/5 & 1/2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1/5 & 1/2 & 1 & 1 & 2\\ 1/2 & 1 & 1/5 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1\end{bmatrix},$$

$$B_3=\begin{bmatrix}1&7&4&5&7&4\\1/7&1&1/3&1/3&1&1/3\\1/4&3&1&4&5&1\\1/5&3&1/4&1&5&1/4\\1/7&1&1/5&1/5&1&1/7\\1/4&3&1&4&7&1\end{bmatrix},\quad B_4=\begin{bmatrix}1&1/2&3&2&7\\3&1&4&3&5\\1/3&1/4&1&1/3&5\\1/2&1/3&3&1&5\\1/7&1/5&1/5&1/5&1\end{bmatrix}$$

依据成对比较矩阵求权向量的特征根法求得各层指标的权重如表 4 所示（具体算法见程序一）.

表 4

指标	权　重	指标	权　重	指标	权　重	指标	权　重
I_{11}	$w_{11}=0.063\ 6$	I_{22}	$w_{22}=0.115\ 7$	I_{32}	$w_{32}=0.048\ 1$	I_{43}	$w_{43}=0.101\ 3$
I_{12}	$w_{12}=0.069\ 6$	I_{23}	$w_{23}=0.369\ 2$	I_{33}	$w_{33}=0.180\ 9$	I_{44}	$w_{44}=0.180\ 5$
I_{13}	$w_{13}=0.202\ 4$	I_{24}	$w_{24}=0.149\ 4$	I_{34}	$w_{34}=0.087\ 1$	I_{45}	$w_{45}=0.038\ 8$
I_{14}	$w_{14}=0.085\ 1$	I_{25}	$w_{25}=0.091\ 9$	I_{35}	$w_{35}=0.035\ 2$	I_1	$w_1=0.129\ 2$
I_{15}	$w_{15}=0.038\ 6$	I_{26}	$w_{26}=0.097\ 4$	I_{36}	$w_{36}=0.191\ 3$	I_2	$w_2=0.078\ 9$
I_{16}	$w_{16}=0.540\ 6$	I_{27}	$w_{27}=0.065\ 5$	I_{41}	$w_{41}=0.254\ 8$	I_3	$w_3=0.254\ 3$
I_{21}	$w_{21}=0.111\ 0$	I_{31}	$w_{31}=0.457\ 4$	I_{42}	$w_{42}=0.424\ 6$	I_4	$w_4=0.537\ 7$

7.3　属性综合评价系统在教师教学质量评估中的应用

属性综合评价系统一般分为三个子系统，即单指标属性测度分析子系统、多指标综合属性测度分析子系统和识别子系统.

在教师教学质量评价这一具体问题中，研究对象空间 X 为全体待评价教师的集合（一般为某个学校某个系或院的全体教师），属性空间 $F=\{$教学质量$\}$. 令 $C_1=\{$非常满意$\}$、$C_2=\{$满意$\}$、$C_3=\{$基本满意$\}$、$C_4=\{$不满意$\}$、$C_5=\{$很不满意$\}$，则$\{C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5\}$构成 F 的一个有序分割类，且 $C_1>C_2>C_3>C_4>C_5$. 假设 $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ 所对的百分制值为 $N=\{n_1=95,\ n_2=80,\ n_3=70,\ n_4=60,\ n_5=45\}$.

我们对每一个元素 x 测量 4 个指标 I_1，I_2，I_3，I_4，其中 I_i（$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$）与表 3 中所列相同. 由表 3 可以看到给出的教学质量评价指标体系分为两层. 若将 I_i称为上层指标，相对的 I_{ij}可以称为下层指标. 每个上层指标 $I_i(i=1,2,3,4)$都是若干个下层指标 $I_{ij}(1\leqslant i\leqslant 4,1\leqslant j\leqslant K_i)$的综合. 根据这一特点，我们分两个层次应用属性综合评价法来对教师教学质量进行评价. 其基本思想是先得出教师 x 关于每个下层指标 I_{ij} 的测量值 x 的属性测度，然后由下层指标的属性综合成教师 x 关于每个上层指标的测量值 I_i 的属性测度，最后采用置信度准则来识别教师 x 的教学质量水平属于哪一评价类，再用评分准则来对所有参评教师进行排序.

（1）教师教学质量下层指标 I_{ij}（$1\leqslant i\leqslant 4$，$1\leqslant j\leqslant K_i$）属性测度的确定.

教师在教学过程中起主导作用，但学生是整个活动过程中的主体. 教师的教学效果如何可以通过学生的学习效果来反映. 为了提高评价的客观性与公正性，教师 x 关于指标 I_{ij} 的测量值 x 的属性测度$\mu_{ijk}=\mu(x_{ij}\in C_k)$ 可由该教师所教的所有学生，根据 x 的具体工作情况给出值的平

均数来确定．给出的$\mu(x_{ij}\in C_k)$必须满足属性测度的性质，即

$$\mu(x_{ij}\in C_k)\geqslant 0,\qquad \sum_{j=1}^{k}\mu(x_{ij}\in C_k)=1,\qquad 1\leqslant i\leqslant 4 \tag{19}$$

（2）教师教学质量水平上层指标I_i（$1\leqslant i\leqslant 4$）属性测度的确定．

用$\mu(x_i\in C_k)$表示学生关于上层指标I_i的测量值x属于C_k的属性测度，则

$$\mu_{ik}=\mu(x_i\in C_k)=\sum_{j=1}^{k_i}w_{ij}\mu_{ijk} \tag{20}$$

其中k_i表示I_i下层指标个数，w_{ij}（$1\leqslant i\leqslant 4$，$1\leqslant j\leqslant k_i$）在表 4 中已给出．

（3）教师教学质量水平多指标综合属性测度的确定．

设教师x属于C_k的综合属性测度为μ_k，则

$$\mu(x\in C_k)=\sum_{i=1}^{m}w_i\times\mu_{ik},\qquad 1\leqslant k\leqslant 5 \tag{21}$$

（4）教师教学质量水平的识别．

由于$\{C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5\}$构成属性空间$F$的一个强序分割类，我们可以采用置信度准则来识别教师的教学质量水平属于哪一个评价类．令$\lambda=0.68$，则

$$k_0=\min\{k:\ \sum_{l=1}^{k}\mu(x\in C_k)\geqslant\lambda,\ 1\leqslant k\leqslant 5\} \tag{22}$$

则认为教师x的教学质量水平属于C_{k_0}类．

（5）应用上述步骤（1）～（4）可以相对公正、客观地评价出教师x的教学质量水平属于哪一个评价类．下面采取评分准则来对教师x进行比较，则教师x的分数为

$$q_x=\sum_{k=1}^{5}n_k\mu(x\in C_k) \tag{23}$$

8 实　例

根据教师的具体教学情况，我们在学生中作了无记名问卷调查．问卷要求学生对 5 位数学系教师关于指标I_{ij}进行打分，共有 38 份有效．其中对教师x_1统计取其平均值得到如表 5 所示的结果．

表 5

指标	I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}	I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}
分数	85	81	84	83	83	89	85	86	87	82	85	85
指标	I_{27}	I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}	I_{41}	I_{42}	I_{43}	I_{44}	I_{45}
分数	81	81	83	82	81	69	67	79	82	82	82	81

由表 5 中的数据和第六部分中 2 的内容，可以得到教师 x_1 关于指标 I_{ij} 的属性测度μ_{ijk}，如表 6 所示.

表 6

关于指标 I_{ij} 的测量值	属于 C_1 的属性测度	属于 C_2 的属性测度	属于 C_3 的属性测度	属于 C_4 的属性测度	属于 C_5 的属性测度
I_{11}	0.333 3	0.666 7	0	0	0
I_{12}	0.066 7	0.933 3	0	0	0
I_{13}	0.266 7	0.733 3	0	0	0
I_{14}	0.200 0	0.800 0	0	0	0
I_{15}	0.200 0	0.800 0	0	0	0
I_{16}	0.600 0	0.400 0	0	0	0
I_{21}	0.333 3	0.666 7	0	0	0
I_{22}	0.400 0	0.600 0	0	0	0
I_{23}	0.466 7	0.533 3	0	0	0
I_{24}	0.133 3	0.866 7	0	0	0
I_{25}	0.333 3	0.666 7	0	0	0
I_{26}	0.333 3	0.666 7	0	0	0
I_{27}	0.066 7	0.933 3	0	0	0
I_{31}	0.066 7	0.933 3	0	0	0
I_{32}	0.200 0	0.800 0	0	0	0
I_{33}	0.133 3	0.866 7	0	0	0
I_{34}	0.066 7	0.933 3	0	0	0
I_{35}	0	0	0.900 0	0.100 0	0
I_{36}	0	0	0.700 0	0.300 0	0
I_{41}	0	0.900 0	0.100 0	0	0
I_{42}	0.133 3	0.866 7	0	0	0
I_{43}	0.133 3	0.866 7	0	0	0
I_{44}	0.133 3	0.866 7	0	0	0
I_{45}	0.066 7	0.933 3	0	0	0

由表 6 的结果和(20)式可得教师 x 关于指标 I_i 的测量值 x_{ik} 的属性测度 μ_{ik}，如表 7 所示.

表 7

关于指标 I_i 的测量值	属于 C_1 的属性测度	属于 C_2 的属性测度	属于 C_3 的属性测度	属于 C_4 的属性测度	属于 C_5 的属性测度
I_1	0.429 0	0.571 0	0	0	0
I_2	0.342 9	0.657 1	0	0	0
I_3	0.070 0	0.703 4	0.165 6	0.060 9	0
I_4	0.096 8	0.877 7	0.025 5	0	0

进而由（21）式得教师 x_1 的属性测度

$$\mu(x\in C_1)=0.152\,3,\ \mu(x\in C_2)=0.776\,4,\ \mu(x\in C_3)=0.055\,8$$
$$\mu(x\in C_4)=0.015\,5,\ \mu(x\in C_5)=0$$

由于 $n_1=95$，$n_2=80$，$n_3=70$，$n_4=60$，$n_5=45$，故由置信度准则（22）式，评价教师的教学质量水平属于 C_2 这一等级．应用评分准则（23）式，教师 x_1 的得分为 $q_{x_1}=81.416\,7$．

根据上述评价过程，对 5 位教师的评价结果如表 8 所示．

表 8

评价教师 x_i	教学态度所得分数	教学内容所得分数	教学方法所得分数	教学效果所得分数	属于 C_1 的综合属性测度	属于 C_2 的综合属性测度	属于 C_3 的综合属性测度	属于 C_4 的综合属性测度	属于 C_5 的综合属性测度	总体所属等级	总体分数
x_1	86.434 3	85.143 7	78.176 0	81.196 9	0.152 3	0.776 4	0.055 8	0.015 5	0	C_2	81.4167
x_2	91.624 0	89.041 9	85.637 0	85.320 6	0.433 9	0.566 1	0	0	0	C_2	86.5089
x_3	89.718 2	86.974 2	84.125 8	84.669 2	0.370 4	0.610 5	0.019 1	0	0	C_2	85.3652
x_4	91.562 2	91.019 0	89.521 2	89.745 2	0.668 2	0.331 8	0	0	0	C_2	90.0235
x_5	90.858 8	89.277 9	86.060 1	87.027 0	0.496 9	0.503 1	0	0	0	C_2	87.4537

从表 8 所示的结果和相关数据，我们可以看到这五位教师的教学质量水平都属于满意层次，都得到了学生们的认可．在程序运行过程中，各指标得分的变化对结果的影响与它的权重有密切的关系，权重越大，对结果的影响越大．这与实际情况较为吻合．另外各指标得分也对数据的变化反应灵敏，起到了很好的评估效果．

9 结　论

本文将属性综合评价法系统应用于教学质量评价之中，为教学质量评价提供了一种新方法．使用本文提供的方法，不仅可以使学校从繁杂的单项评价指标中，得到对教师质量水平较为客观合理的综合评价，而且还可以使教师了解到自己在教学工作中的薄弱环节，以利改进．属性综合评价法注意了教学质量属性空间的“有序性”，采用了比较合理的置信度识别准则．按照本文的方法，不同的学校、院系依据各自的实际情况建立新的评价指标体系，可以对教师进行评价．实例证明，该方法是有效的，并得到了有益的结果，对高校教学质量的管理和控制提供了参考．另外，属性综合评价法除用于教师教学质量评价中外，还可用于其他的综合评价中，如大气质量、汽车行驶性能、科技成果、国家综合国力的评价等，因此本模型具有很大的应用价值．

参 考 文 献

[1]　陈内萍．教学质量评估的模糊综合评判模型[J]．湖南商学院学报，1999，6（3）：59～60

[2]　丁绍芳．关于课程教学质量综合评价模型的探讨[J]．北方工业大学学报，1998，6（2）：

138～139

[3] 赵立新，王石安，赖元峰．教学质量评估的定量比较评价模型[J]．数学实践与认识，2005，35（1）：12～17

[4] 刘祥会，张红．基于模糊动态模糊聚类分析的教学质量评估方法研究[J]．四川师范大学学报（自然科学版），2005，35（1）：12～17

[5] 程乾生．属性识别理论模型及其应用[J]．北京大学学报（自然科学版），1997，33（1）：12～19

[6] 程乾生．属性集和属性综合评价系统[J]．系统工程理论与实践，1997，9：1～8

[7] 程乾生．层次分析法 AHP 和属性层次模型 AHM[J]．系统工程理论与实践，1997，11：25～28

[8] 程乾生．质量评价的属性数学模型和模糊数学模型[J]．数理统计与管理，1997，16（6）：18～23

[9] 冯媛，张强．师范学生教学工作能力的属性综合评价[J]．数学实践与认识，2003，33（5）：21～25

[10] 闻新，周露，张鸿．Matlab 科学图形构建基础与应用（6.x）[M]．北京：科学出版社，2002

[11] 姜启源．数学模型（第三版）[M]．北京：高等教育出版社，2003

高校学生工作绩效综合评价数学模型

吴朝平

【摘　要】在高校学生工作绩效的评价中，建立数学模型对其进行定性、定量评价研究．运用主成分分析——多维偏好线性规划耦合赋权方法（即 PC-Linmap 耦合赋权方法），以统计样本优劣排序——Linmap 耦合赋权方法计算的权重作为修正，分别确定各指标权重．用模糊综合评判法建立了高校学生工作绩效的综合评价模型，即 $B=\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{R}$．并给出了模型的计算机算法设计及程序，以系学生工作的评估为例，具体介绍模型的应用．

【关键词】PC-Linmap　综合评估　学生工作

1　引　言

我国高校学生工作历来在学校整体工作中处于非常重要的位置．目前我国各高校是将学生工作纳入到管理部门来设置，把学生工作列入党政管理队伍来配备．它是保持学校稳定，保证教学和管理秩序的基础．是对学生进行思想政治教育的重要阵地．学生管理工作质量的提高，有赖于我们对学生工作管理质量的正确、公正的评价．现代教育理念已将学生工作定位于教育、管理和服务，显得尤为重要．高校学生管理工作绩效评价是一项重要且非常复杂的事情，任何一所高校都涉及这个问题．如何建立科学的评价指标体系，如何使评价工作公平、公正、合理和透明是高等院校一直探索的问题．虽然目前也有许多研究涉及绩效评估方面的内容，但还没有用数学模型对学生工作质量进行定性、定量评估方面的研究．尤其在我校的“三标一体”管理模式下，要求评估工作定性与定量相结合的情况下，就更有必要研究一套合理的、能够将定性与定量相结合的、先进可靠且可操作性强的评价方法．

2　高校学生管理工作绩效评价指标体系

我国高校学生工作组织机构大多是一种典型的直线职能式科层制组织结构，如图 1 所示．

我校学生工作组织机构也是这种科层制组织结构，如图 2 所示．

由图 2 可知，各级学生工作因人而异，学生工作绩效评价也不能一概而论，因而不容易找到他们共同的评价指标体系．可将其分成三个层次来分别评价．第一层：各高校主管学生工作

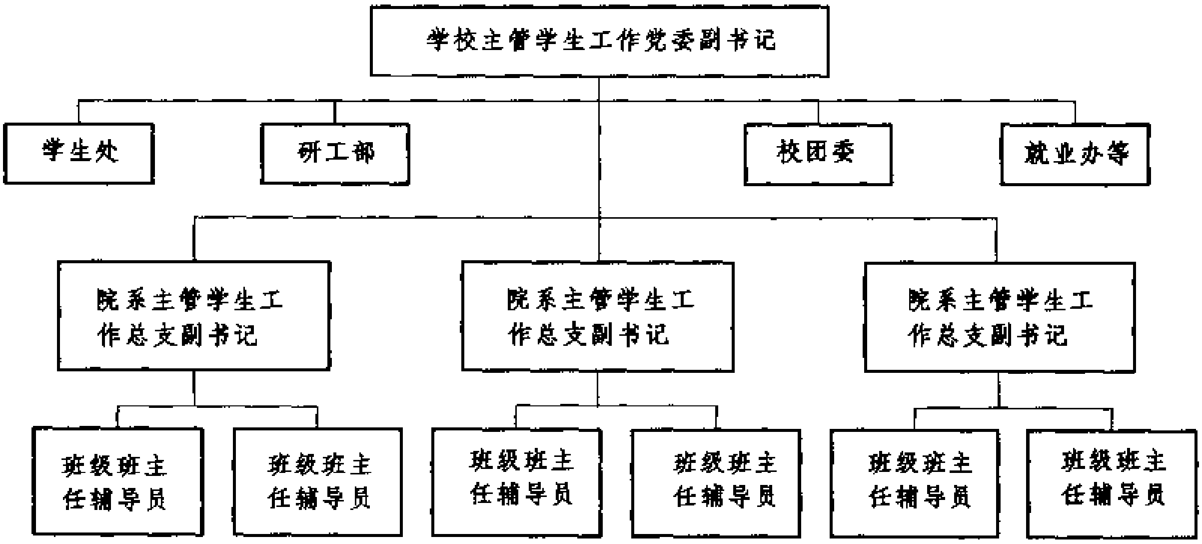


图 1

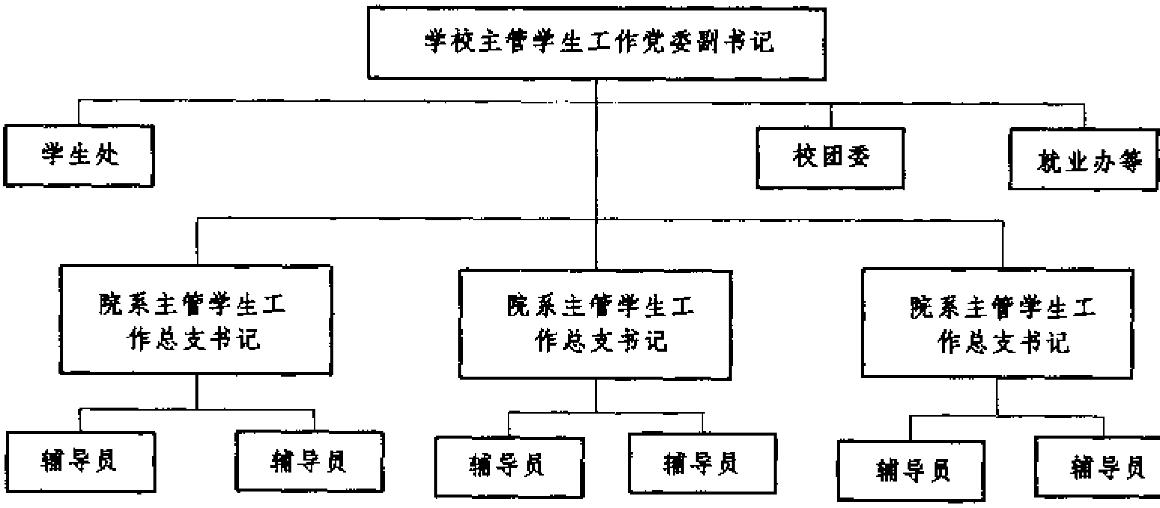


图 2

的组织者绩效评价．第二层：校内各系部主管学生工作的组织者绩效评价．第三层：各系各年级班主任或辅导员学生工作绩效评价．

高校学生管理工作，是高校工作的一个重要组成部分，一个学校学生管理工作的好坏，直接关系到学校的教学质量，关系到学生的素质，以及学校在社会上的声誉．特别是这几年来高校的扩招，后勤社会化及弹性学分制和完全学分制，给高校学生工作提出了更高的要求．以我校学生工作组织机构为例，具体指标体系的确定如附录 1．

3 综合评价指标体系中各指标权重的确定

确定指标权重是系统综合评价的重要组成部分，指标权重确定适当与否，将直接关系到模型的好坏．另外，指标权重一旦确定，也就知道影响综合绩效的瓶颈，所以在某种意义上说，

赋权方法本身就是一种评价分析方法．目前有许多种赋权方法，如层次分析法、多元统计分析法、模糊方程求解法、专家调查法等，但是这些方法都有一定的适用范围和局限性：层次分析法和专家咨询法带有主观经验性和耗时性；多元统计法（主成分分析法）只能科学地求得综合指标（主成分）的权重，而不能给出单个指标的权重，评价人仍然不知道影响质量的关键性因素；以模糊方程求解指标权重，需预先给定其优劣顺序，因条件苛求也易受到限制．因此，本文采用 PC-LINMAP 耦合赋权法，其方法特点是：（1）赋权的原始信息直接来自统计数据，具有客观性；（2）应用 PC 对原始信息进行系统分析，求得的优劣顺序能反映真实情况，因而基于人员有序对求得的指标权重具有科学性；（3）最后求得的是单个指标的权重，即不是多个指标的组合权重，结论明确，实用性强．

下面介绍 PC-LINMAP 耦合赋权法：

3.1　PC 子模型

设有 n 个被评价的对象，评价每个对象都有 p 个指标，其原始数据用决策矩阵 $(X_{ij})_{n\times p}$ 表示，欲综合评价这 n 个对象的优劣顺序，用 PC 解决原理及其计算方法如下．

（1）原始数据标准化处理．

为了清除各指标的不可公度性，将原始数据标准化处理：

$$Y_{ij}=\frac{X_{ij}-\overline{X}_j}{\sigma_j},\quad (i=1,2,3,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,p) \tag{1}$$

其中，

$$\overline{X}_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{ij},\quad \sigma_j=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{ij}-\overline{X}_j)^2},\ (\forall i,j) \tag{2}$$

（2）计算指标的相关矩阵 $\boldsymbol{R}$：

$$\boldsymbol{R}=(r_{jk})_{p\times p} \tag{3}$$

这里

$$r_{jk}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}Y_{ji}\cdot Y_{ki}\quad (j,k=1,2,\cdots,p) \tag{4}$$

（3）求相关矩阵的特征值与特征向量．

用雅可比方法求相关矩阵的特征值 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,p)$，并记作

$$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\lambda_p\geqslant 0 \tag{5}$$

同时求得相应的特征向量

$$\beta_l=(\beta_{l1},\beta_{l2},\cdots,\beta_{lp})^{\mathrm{T}},\quad (l=1,2,\cdots,p) \tag{6}$$

（4）确定关键性指标．

选取前 m 个关键性指标，这里正整数 m 为满足下式的最小值

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i}\geqslant 90\% \tag{7}$$

（5）计算关键性指标得分值.

第 i 个参评者在前 m 个关键性指标上的得分值 $Z_1^i, Z_2^i, \cdots, Z_m^i$ 为

$$\begin{pmatrix} Z_1^i \\ Z_2^i \\ \vdots \\ Z_m^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \cdots & \beta_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{ip} \end{pmatrix} \tag{8}$$

（6）计算被评价者的关键性指标总得分值.

第 i 个被评价者的总得分值 F_i 为

$$F_i = \sum_{j=1}^{m} P_j \left| Z_j^i \right|, \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{9}$$

其中，P_j 为第 j 个关键性指标保持原始数据信息的比重，即

$$P_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{l=1}^{p}\lambda_l} \tag{10}$$

参评者的绩效优劣顺序按总得分值 F_i 由大到小排列.

3.2 Linmap 子模型

经标准化处理的决策矩阵 $(Y_{ij})_{n\times p}$ 可以在空间表示，即在 p 维空间中有 n 个被评价对象. 人最偏好的指标空间中的理想点用 $(Y_1^*, Y_2^*, \cdots, Y_p^*)$ 表示，则空间中任一被评价者(Y_{i1}, Y_{i2}, Y_{ip}) 到理想点的加权欧几里德距离平方 S_i 为

$$S_i = \sum_{j=1}^{p} W_j \left(Y_{ij} - Y_j^*\right)^2, \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{11}$$

式中，$W_j\ (j = 1, 2, \cdots, p)$ 是第 j 个指标的权重平方.

显然，评价人对被评价者的偏好顺序，也即由（9）式求取的按 F_i 由大到小顺序，如转换成用（11）式表示，可按 S_i 值由小到大依次排列.

在这里，W_i 和 Y_j^* 均为未知数，求解 W_j 正是本文的目的. 下面进一步递推 Linmap 求解 W_j 的原理和算法.

定义 1：参评者有序对（k, l）的集 Q 为

$$Q = \{(k, l) \mid k \text{ 参评者优于 } l \text{ 参评者}\} \tag{12}$$

如果 $S_l \geqslant S_k$，则按（11）式的优劣顺序和有序对（k, l）一致，即不一致程度为零；如果 $S_l < S_k$，

则按（11）式的排序和有序对（k，l）不一致，其不一致程度取决于 S_k-S_l 的差值．故有

定义 2：被评价者按（11）式排序和有序对（k，l）不一致程度记作$(S_l-S_k)^-$，它是

$$(S_l-S_k)^-=\begin{cases}0, & S_l\geqslant S_k\\ S_l-S_k, & S_l<S_k\end{cases}$$

$$=\max\{0,(S_l-S_k)\} \tag{13}$$

这里，对 Q 中所有有序对（k，l）求和，得到总的不一致程度，称为不一致度 B．有

$$B=\sum_{(k,l)\in Q}(S_l-S_k)^- \tag{14}$$

同理，定义一致度 G 为

$$G=\sum_{(k,l)\in Q}(S_l-S_k)^+ \tag{15}$$

其中

$$(S_l-S_k)^+=\begin{cases}S_l-S_k, & S_l\geqslant S_k\\ 0, & S_l>S_k\end{cases}$$

$$=\max\{(S_l-S_k),0\} \tag{16}$$

显然，当按（11）式优劣排序和有序对（k，l）一致时，B 为极小，且 $G>B$．通常，为了避免问题的平凡解（$W_j=0$，$j=1$，2，…，p），引入某正数 h，把 $G>B$ 改为

$$G-B=h \tag{17}$$

即有

$$G-B=\sum_{(k,l)\in Q}(S_l-S_k)^+-\sum_{(k,l)\in Q}(S_l-S_k)^-$$

$$=\sum_{(k,l)\in Q}[(S_l-S_k)^+-(S_l-S_k)^-]=\sum_{(k,l)\in Q}(S_l-S_k)=h \tag{18}$$

这样指标权重的平方 W_j 就可通过求如下有约束的最优问题得到：

$$\min\left\{B=\sum_{(k,l)\in Q}\max\{0,(S_k-S_l)\}\right\} \tag{19}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{(k,l)\in Q}(S_l-S_k)=h \tag{20}$$

通过变换，该最优化问题即为下列线性规划问题：

$$\min\sum_{(k,l)\in Q}\lambda_{kl} \tag{21}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}(S_l-S_k)+\lambda_{kl}\geqslant 0,\ \text{对于所有}\ (k,l)\in Q & (22)\\ \displaystyle\sum_{(k,l)\in Q}(S_l-S_k)=h & (23)\\ \lambda_{kl}\geqslant 0,\ \text{对于所有}\ (k,l)\in Q & (24)\end{cases}$$

其中，λ_{kl}为按（9）式的参评对象优劣排序与有序对（k，l）的不一致度，即

$$\lambda_{kl}=\max\{0,(S_k-S_l)\} \tag{25}$$

又由（11）式，有

$$S_l-S_k=\sum_{j=1}^{p}W_j(Y_{lj}-Y_j^*)^2-\sum_{j=1}^{p}W_j(Y_{kj}-Y_j^*)^2=\sum_{j=1}^{p}W_j(Y_{lj}^2-Y_{kj}^2)-2\sum_{j=1}^{p}W_j(Y_{lj}-Y_{kj}) \tag{26}$$

将（26）式代入（22）和（23）式，即得求解的 Linmap 子模型

$$\min\sum_{(k,l)\in Q}\lambda_{kl} \tag{27}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{p}W_j(Y_{lj}^2-Y_{kj}^2)-2\sum_{j=1}^{p}V_j(Y_{lj}-Y_{kj})+\lambda_{kl}\geqslant 0,\ \text{对所有}\ (k,l)\ \text{属于}\ Q & (28)\\ \sum_{j=1}^{p}W_j\sum_{(k,l)\in Q}(Y_{lj}^2-Y_{kj}^2)-2\sum_{j=1}^{p}V_j(Y_{lj}-Y_{kj})=h & (29)\\ W_j>0,\quad j=1,2,\cdots,p & (30)\\ \lambda_{kl}\geqslant 0,\quad \text{对于所有}\ (k,l)\in Q & (31)\\ V_j\ \text{非负限制}\ (V_j=W_jY_j^*) & (32)\end{cases}$$

4 多层次综合评判

4.1 确定模糊集

设一级指标集为$X=(X_1,X_2,\cdots,X_p)$，由上面的模型可确定相应的权重向量$W=(a_1,a_2,\cdots,a_p)$；二级指标集为$X_1=(X_{k1},X_{k2},\cdots,X_{kq})$，相应的权重向量$W_k=(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kq})$；三级指标集为指$X_{ki}=(X_{ki1},X_{ki2},\cdots,X_{kis})$，相应的权重向量$W_{ki}=(a_{ki1},a_{ki2},\cdots,a_{kis})$.

4.2 确定评语集

评语集是以对评价对象可能做出的各种评价结果为元素所组成的集合，用U表示：

$$U=(U_1,U_2,\cdots,U_r)$$

其中$U_j\,(j=1,2,\cdots,r)$表示对指标因素的第j种评价结果．根据需要r可由评价者自定．

4.3 进行单因素评判，得隶属矩阵

先对第 3 级因素集$X_{ki}=(X_{ki1},X_{ki2},\cdots,X_{kis})$的$s$个因素进行单因素评判，得单因素评判矩阵：

$$R_{ki}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1s} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{ms} \end{pmatrix}$$

其中，r_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, s)$ 表示指标 X_{kij} 对于第 j 级评语 U_j 的隶属度. r_{ij} 的求法为：若对指标 X_{kij} 有 U_{ml} 个人判其为 U_1 的评语，U_{m2} 个人判其为 U_2 评语，……U_{mn} 个人判其为 U_r 评语，则

$$r_{ij}=\frac{U_{mj}}{\sum_{j=1}^{n}U_{mj}},\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

4.4　进行模糊矩阵运算

模糊矩阵的运算法则为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为权重向量，$\boldsymbol{R}$ 为模糊矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为隶属向量. 先对第 3 级指标 X_{ki} 的评价矩阵 R_{ki} 作模糊矩阵运算，得到指标 X_{ki} 对评语集 V 的隶属向量 $B_{ki}(i=1, 2,\cdots, s)$，$B_{ki}=A_{ki}\cdot R_{ki}=(b_{k11}, b_{k12},\cdots, b_{k1n})$，记

$$\boldsymbol{R}_k=\begin{pmatrix} B_{k1} \\ B_{k2} \\ \vdots \\ B_{kq} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{k11} & b_{k12} & \cdots & b_{k1n} \\ b_{k21} & b_{k22} & \cdots & b_{k2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{kq1} & b_{kq2} & \cdots & b_{kqn} \end{pmatrix}$$

再对第 2 级指标 X_k 的评价矩阵 $\boldsymbol{R}_k$ 作模糊矩阵运算，得到指标 X_k 对于评价集 V 的隶属向量 B_k，即 $B_k=A_k\cdot R_k=(b_{k1}, b_{k2},\cdots, b_{kq})$，记

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qn} \end{pmatrix}$$

然后对 $\boldsymbol{R}$ 进行模糊矩阵运算，即得到第 1 级指标 X 对于评语集 V 的隶属向量 $\boldsymbol{B}$：

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{R}=(b_1, b_2,\cdots, b_n)$$

由上即可得出评价结果.

5　多层次综合评判算法

多层次综合评判算法如图 3 所示.

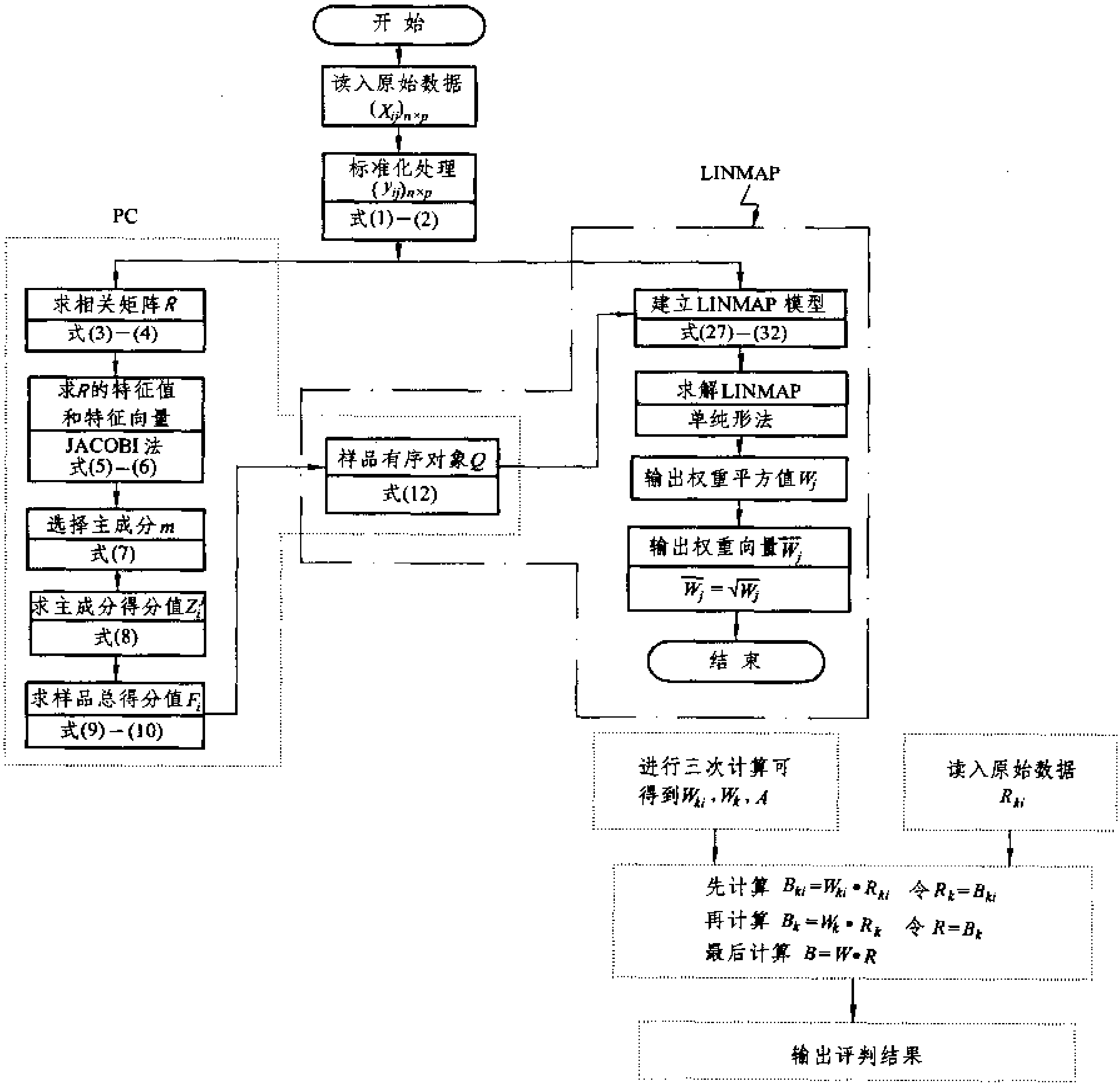


图3

6 以系学生工作的绩效评价为例具体介绍模型应用

6.1 权重计算

根据我校系部学生工作绩效评价指标体系，需对各指标的重要性程度进行评价，评价指标 $C=\{C_1, C_2, C_3, \cdots, C_p\}$，各指标的评分集为 $T=\{$非常重要，较为重要，重要，一般，不大重要，不重要，很不重要$\}$（评价集的划分一般有9级、7级、5级划分，具体的划分可根据评价的要

求具体确定），将评分集对应于一个分值集$T'=\{9,\ 7,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\}$．设有 10 人的专家组，每位专家可在评分集合$T'$中对每一个指标挑选一个适当的评分，由打分法分别得出各专家对各指标的评价分值，假设构成的决策矩阵为 $\boldsymbol{X}$：

$$\boldsymbol{X}=\begin{array}{r}\\ \text{专家}1\\ \text{专家}2\\ \text{专家}3\\ \text{专家}4\\ \text{专家}5\\ \text{专家}6\\ \text{专家}7\\ \text{专家}8\\ \text{专家}9\\ \text{专家}10\end{array}\begin{array}{c} C_1\,C_2\,C_3\,C_4\,C_5\,C_6\,C_7\,C_8\,C_9\,C_{10}\,C_{11}\,C_{12}\,C_{13}\,C_{14}\,C_{15}\,C_{16}\,C_{17}\,C_{18}\,C_{19}\,C_{20}\,C_{21}\\ \begin{pmatrix}4&3&3&3&2&3&4&7&5&9&9&9&5&7&9&5&3&9&7&5&4&9\\ 3&4&2&3&3&4&3&5&9&7&7&7&7&7&7&7&5&9&7&5&3&7\\ 1&3&2&4&4&3&3&4&5&9&5&7&7&9&7&7&5&7&6&7&3&9\\ 3&3&2&4&3&3&4&5&4&7&7&5&4&3&5&9&9&5&4&4&3&9\\ 3&4&2&3&3&2&4&4&7&5&9&9&3&7&7&5&7&7&4&5&5&9\\ 1&3&3&4&2&4&4&9&5&4&7&7&7&9&7&7&5&9&3&4&4&7\\ 4&4&2&4&4&2&5&7&9&7&5&5&7&5&5&7&4&7&7&3&4&7\\ 3&2&2&3&4&3&4&5&5&9&7&4&9&5&9&7&5&4&7&4&3&9\\ 2&3&3&2&3&2&4&7&5&9&4&7&7&7&5&5&7&7&4&3&5&9\\ 3&4&1&2&2&3&4&7&4&7&9&5&5&7&5&4&7&9&4&7&4&9\end{pmatrix}\end{array}$$

把矩阵 $\boldsymbol{X}$ 输入 PC 模型（以下均由计算机求解），由公式（1）～（4）求得指标的相关矩阵 $\boldsymbol{R}$，如附录 2．然后用雅可比技术解得相关矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的特征值和特征向量如表 1 所示．

表 1　矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的特征值和特征向量

评价组合		特征向量（主成分部分）						
		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7
指标序号	1	0.261 1	0.201 0	−0.180 3	0.038 9	−0.300 0	−0.027 9	0.178 9
	2	0.161 7	−0.325 4	−0.238 9	−0.022 1	−0.004 9	0.303 4	−0.120 4
	3	−0.114 6	−0.002 7	0.383 4	0.000 5	−0.374 1	0.131 8	0.229 6
	4	−0.174 5	0.082 7	0.284 6	0.024 2	0.454 1	0.248 7	−0.133 4
	5	−0.360 5	−0.062 2	0.052 4	0.039 8	−0.002 1	−0.110 8	0.347 5
	6	0.203 9	0.357 0	0.088 7	−0.209 8	−0.126 2	0.144 8	0.023 6
	7	0.146 2	0.342 1	−0.270 5	0.066 3	−0.085 4	0.057 4	0.000 9
	8	0.141 9	0.253 7	0.109 2	−0.343 9	−0.324 3	0.228 4	−0.098 6
	9	0.044 4	−0.394 0	0.005 1	−0.133 0	−0.219 0	−0.199	0.067 4
	10	−0.185 5	0.045 1	−0.127 2	0.355 3	−0.228 9	−0.262 2	−0.191 9
	11	0.242 3	0.185 1	−0.123 2	0.247 5	0.269 9	0.306 5	0.066 6
	12	0.223 3	−0.216 6	0.191 1	0.160 4	−0.040 4	0.175 2	0.372 4
	13	−0.255 8	0.182 7	0.186 6	−0.123 6	−0.272 1	−0.132 9	−0.342 1
	14	0.190 8	−0.086 3	0.439 3	0.093 1	−0.062 6	−0.184 1	−0.097 6
	15	−0.007 5	0.289 6	0.207 7	0.393 8	−0.111 8	0.105 5	0.286 9
	16	−0.282 0	0.115 0	0.007 69	−0.283 2	0.143 3	0.188 2	0.355 2
	17	0.130 2	0.065 9	−0.283 9	−0.379 9	0.045 9	−0.286 8	0.250 8
	18	0.280 0	−0.172 9	0.191 8	−0.027 0	−0.063 1	0.292 8	−0.301 3
	19	−0.189 9	0.020 3	−0.229 1	0.380 1	−0.238 6	0.212 9	−0.114 1

续表 1

评价组合		特征向量（主成分部分）						
		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7
指标序号	20	0.276 3	0.146 4	0.090 6	0.208 7	0.176 2	−0.306 0	0.100 5
	21	0.181 7	−0.311 2	−0.015 7	0.076 1	−0.182 4	−0.079 9	0.210 5
	22	0.286 4	0.069 7	0.252 2	0.004 7	0.149 2	−0.366 1	−0.106 1
对应的特征值		5.651 3	4.174 8	3.194 5	2.280 9	1.935 1	1.697 0	1.134 2

由公式（8）～（10）求得主成分分析结果（优劣评价和排序）如表 2 所示.

表 2　主成分分析结果

专家意见	第一主成分值	第二主成分值	第三主成分值	第四主成分值	第五主成分值	第六主成分值	第七主成分值	综合评价	
								评价值 F_i	排序名次
1	1.159 2	−0.896 8	0.012 8	−0.154 6	−0.194 9	0.273 6	−0.577 5	1.924 5	2
2	−0.111 7	1.237 9	−0.280 6	0.089 1	−0.114 8	1.946 9	0.116 4	−0.146 2	6
3	−1.495 0	0.994 2	−0.427 2	0.209 8	−0.147 4	−1.212 6	−0.013 9	−1.465 3	10
4	0.324 3	0.114 8	0.494 8	0.645 9	0.042 4	−0.619 5	0.868 3	0.841 6	3
5	−0.105 4	−1.877 4	0.668 2	−0.6797	−2.239 3	0.483 5	0.390 8	−0.099 8	5
6	0.163 2	1.597 4	1.106 1	−0.323 4	0.881 6	−0.188 3	−1.152 1	0.479 1	4
7	−1.466 1	−1.199 2	−1.307 5	1.832 3	1.013 6	−1.501 6	1.473 8	−1.245 8	9
8	−0.276 4	1.352 2	−0.832 4	−0.380 1	0.596 2	−1.509 5	−1.808 3	−0.201 3	7
9	−1.231 1	−0.739 7	−0.524 5	0.442 1	0.197 7	1.468 6	−0.047 7	−1.024 3	8
10	3.039 0	−0.583 4	1.090 3	−1.681 6	−0.035 0	0.858 8	0.750 2	2.821 4	1

由上得优劣顺序 O 为

$$O=\{10,\ 7,\ 5,\ 8,\ 3,\ 9,\ 6,\ 1,\ 2,\ 4\}$$

即意见的有序对集为

$$\begin{aligned}Q=\{&(10,\ 7),\ (10,\ 5),\ (10,\ 8),\ (10,\ 3),\ (10,\ 9),\ (10,\ 6),\ (10,\ 1),\\ &(10,\ 2),\ (10,\ 4),\ (7,\ 5),\ (7,\ 8),\ (7,\ 3),\ (7,\ 9),\ (7,\ 6),\ (7,\ 1),\\ &(7,\ 2),\ \cdots,\ (6,\ 1),\ (6,\ 2),\ (6,\ 4),\ (1,\ 2),\ (1,\ 4),\ (2,\ 4)\}\end{aligned}$$

将 Q 代入线性规划公式（27）～(32)，由单纯形法求得 22 个指标的权重平方值 W_i 为

$$\begin{aligned}W_i=(&0.002\,4,\ 0.008\,3,\ 0.002\,1,\ 0.002\,5,\ 0.003\,2,\ 0.003\,3,\ 0.002\,4,\\ &0.003\,5,\ 0.008\,8,\ 0.009\,1,\ 0.008\,7,\ 0.007\,2,\ 0.006\,8,\ 0.006\,9,\\ &0.005\,4,\ 0.006\,5,\ 0.008\,5,\ 0.005\,4,\ 0.007\,1,\ 0.007\,6,\ 0.005\,8,\ 0.009\,8)\end{aligned}$$

即 22 个指标的权重向量为

$$\begin{aligned}\overline{W_i}=\sqrt{W_i}=(&0.049,\ 0.091\,1,\ 0.045\,8,\ 0.050,\ 0.056\,6,\ 0.057\,4,\ 0.049,\ 0.059\,2,\\ &0.093\,8,\ 0.095\,4,\ 0.093\,3,\ 0.084\,9,\ 0.082\,5,\ 0.083\,1,\ 0.073\,5,\ 0.080\,6,\\ &0.092\,2,\ 0.073\,5,\ 0.084\,3,\ 0.087\,2,\ 0.076\,2,\ 0.099)\end{aligned}$$

归一化后得

$\overline{W_i}$ = (0.029 6, 0.055 0, 0.027 7, 0.030 2, 0.034 1, 0.034 7, 0.029 6, 0.035 7, 0.056 6, 0.057 6, 0.056 3, 0.051 2, 0.049 8, 0.050 1, 0.044 3, 0.048 6, 0.055 6, 0.044 3, 0.050 8, 0.052 6, 0.046 0, 0.059 7)

6.2 综合评估

现对我校的某 8 个系进行综合评估，用百分制给评价等级赋值，如表 3 所示.

表 3

等　级	A	B	C	D	E
分　数	90	80	70	60	45

随机抽 100 人对这 8 个系进行等级评价（评价表如附录 3），对调查结果进行统计. 统计方法如下：将等级转化为对应分值，然后将 100 个分值相加后再求平均，即得某个系某个指标的最后分值. 如某个系第一个指标的最后分值 = [50 × (A = 90) + 15 × (B = 80) + 20 × (C = 70) + 10 × (D = 60) + 5 × (E = 45)]/100 (程序见附录 4).

假设其各系评价指标体系的相应得分值如表 4 所示.

表 4　指标评判矩阵

各指标得分值	评判矩阵 R							
	第一个系	第二个系	第三个系	第四个系	第五个系	第六个系	第七个系	第八个系
1	90	60	70	45	80	90	80	80
2	80	70	80	60	80	80	70	70
3	70	80	80	90	70	70	80	45
4	80	80	70	80	60	70	80	70
5	45	70	70	70	70	80	60	80
6	80	45	70	80	80	60	70	90
7	80	90	80	80	90	70	60	80
8	70	80	80	90	80	80	80	60
9	90	80	60	60	60	60	90	70
10	70	70	60	70	45	80	80	80
11	60	60	70	90	60	80	80	80
12	70	60	80	80	70	70	90	90
13	90	70	60	80	80	60	70	80
14	90	80	45	70	80	90	70	70
15	80	90	60	60	70	80	80	80
16	90	70	70	70	80	90	80	60
17	80	60	80	80	60	60	90	70
18	70	50	90	70	70	70	80	70
19	80	60	70	80	90	80	60	80
20	80	70	80	60	80	70	45	90
21	70	80	60	70	80	80	60	60
22	90	90	70	80	45	80	80	60

由 $B_1 = W \cdot R_1$，$B_2 = W \cdot R_2$，$B_3 = W \cdot R_3$，$B_4 = W \cdot R_4$，…，$B_8 = W \cdot R_8$，通过计算机计算可得：

$$B = (B_1, B_2, \cdots, B_8) = (75.8, 70.9, 70.2, 73.2, 70.7, 75.0, 74.7, 73.7)$$

从而可得出评估结果（程序见附录 4）.

7 结 论

从上述结果中可以看出第一个系学生工作综合评分得分最高、通过关键性指标的计算，得到影响学生工作综合评估的关键因素在于研究制度创新、学生工作队伍建设、学生素质教育、学生工作者的工作作风、学生教育培养、学生就业指导、学生管理服务，这与实际相符[1].通过这些关键性因素的确定，可以使学生工作者看到目前学生工作的不足之处，从而有助于学生工作质量的进一步提高.

该模型将评价工作进行量化，使得评选工作易于操作．同时，直接给出单个指标的权重，便于人们分析系统中的关键性因素，具有较强的实用性．引入计算机资源，大量科学而繁复的系统分析和计算过程由计算机完成，评价人只要把原始数据矩阵输入计算机即可方便地得到评价结果．此外，此模型也可以用于评估学校的办学质量，评估教师的教学水平，人才选拔等方面，只需更改相应的指标体系即可.

参 考 文 献

[1] 文晓灵．从中美比看我国高校学生工作队伍建设[J]．比较教育研究，2005，(2) 65～69

[2] 赵焕臣等．层次分析法[M]．北京：科学出版社，1986

[3] 张尧庭，方开泰．多元统计分析引论[M]．北京：科学出版社，1982

[4] 谢季坚，刘承平．模糊数学方法及其应用[M]．武汉：华中科技大学出版社，2000

[5] 应天元．系统综合评价的赋权新方法 —— PC-Linmap 耦合模型[J]．系统工程理论与实践，1997，(2)：8～13

附录　高校学生工作绩效评价指标体系（见表 1，表 2，表 3）

表 1　高校校级学生工作绩效评价指标体系

	考评内容	一级指标
高校学生工作绩效评价指标体系	管理理念	以学生为中心
		科学化管理
		层级分明的教育目标 以学生为关注重点的教育机制
		过程管理的工作控制
	机构设置和建设	机构设置合理
		机构建设跟上时代要求
	制度建设	激励机制
		教育机制
		工作制度
	工作创新	管理体系创新
		管理理念创新
		制度创新
	工作队伍建设	工作队伍的专业化

表 2　学生工作绩效评价指标体系

	考评项目	考评内容	一级指标
系部学生工作绩效评价指标体系	系领导对学生工作的领导	重视学生工作	领导班子经常研究学生工作，期初有计划，期终有总结
		队伍建设	学生工作干部队伍、辅导员队伍人员配备齐全，结构合理，队伍稳定，工作积极性高
		会议考勤	系领导、辅导员会议出勤好，会议精神传达及时
	学生教育	素质教育	精心协助、准备开展大学生能力素质培训及各类学生活动
		专业素质拓展教育	重视专业思想教育、深入课堂、开展学生学习情况座谈会
		周末思想政治教育	系领导参加与组织周末教育情况
			周末教育时间及场地安排合理
			周末教育备课情况，素材准备系统、科学、生动
			周末教育秩序、纪律好
		国防教育	协助抓好军训工作和新生入学教育工作
		身心素质教育	重视学生身心健康教育
	学生管理	制度落实	规章制度、激励机制、工作运行机制健全
		学风建设	学习风气浓、考风良好
		工作作风	学校交办各项任务完成及时、收集学生信息反馈准确、对违纪学生教育处理及时
		公寓管理	辅导员不定时地深入学生寝室了解情况

续表 2

	考评项目	考评内容	一级指标
系部学生工作绩效评价指标体系	学生管理	班组建设	班风健康向上、班级凝聚力强
		遵规守纪	学生纪律遵守好、工作扎实、学生违纪比例小
	学生服务	学习生活	关心学生的学习、生活、假期成绩、喜报寄送及时
		成　长	家长联系制度实施好
		就业指导	及时反映就业信息，就业率达 90％ 以上
	学生评价	教育培养评价	有计划、全面、有针对性
		管理服务评价	管理制度健全、服务学生意识强、态度好、工作有创新
	工作创新	研究、制度创新	学生工作理念研究成果丰富，实施的新制度成效显著、有推广意义

表 3　各年级班主任或辅导员学生工作绩效评价

	一级指标	二级指标
辅导员学生工作评介指标体系	思想政治教育	定期组织学生开展思想政治学习，准备充分、题材丰富
		深入课堂、宿舍了解学生情况
		个别谈心交流思想，并进行身心健康教育
		组织学生参加社会实践活动
	专业教育	熟悉学生、《学生专业教学计划》
		对学生所学专业有认识和了解
		开展专业教育、指导专业学习情况较好
	常规工作管理	常规工作管理有针对性、规范、科学讲求方法
		在各类评优评奖中公开、公平、公正
		工作认真负责、不拖拉、推委、敷衍
		工作有计划、有总结、有检查、有改进、有记录
	执行制度	班组管理制度健全、制度落实到位
		参加早操、升旗仪式及学校的会议、活动等
		组织学生宣传、学习校系规章制度
	党团建设	注重班支委建设，队伍健全
		关心、支持院（系）两委会工作
		关心学生思想上追求进步，注重入党积极分子培养

模糊层次分析法在教学质量评估中的应用

夏　轶

【摘　要】介绍了模糊层次分析法与层次法的异同，重点突出了模糊层次分析法在影响研究对象的因素众多且不确定时，所表现出的极高的解题效率，而且使电脑在解题过程中合乎人脑善于判断的优势，运算过程更精确．在运用其解决高校教师教学质量评估问题中，得到定量评价模型 $P=WR$，并与 Matlab 相结合，对所作调查的老师作出了科学公正的评价．

【关键词】模糊层次分析法　限位系数　教学质量

1　引　言

在科学技术高度发达的现代社会里，在竞争激烈的高等院校中，随着学生素质的不断提高，社会、家长、学生以及学校对一所高校的教学质量要求也越来越高．教学质量是高校教育质量的核心内容，是一个系统工程，应当在高校教育质量的全景视野中来加以审视．那么怎样来对高校的教学质量进行评估，则成为当今社会比较热门的一个课题．

学生对教师的课堂教学质量的评价，在教师的教学效果评价体系中占有重要地位．由于在现实教学与生活中，与教师教学质量变化的相关因素比较多，而且这些因素之间的关系比较复杂，因此，如何建立科学的评价体系显得越发重要．

纵观多年来人们对此类问题的解决方法众多，但均存在许多不足之处．有的采用单独的层次分析法，有的则采用单一的评判分析法来解决问题．其共同的缺点在于它们在分析过程中过于片面，计算过程与现代化计算工具结合不够紧密，因而步骤多，过程繁，结果不够精确．

本文运用了近几年来学术界甚为流行的一种方法 —— 模糊层次分析法（AHP）．它将模糊数学与多层次分析原理相结合，通过给出模糊数，定义相关的模糊均值、模糊标准差、模糊数的限位系数，再对限位系数所确定的模糊数排序，并与 Matlab 相结合，最终进行模糊综合评判，对教师教学质量进行评估．

2　模糊层次分析法的基本原理

2.1　模糊数序

由于模糊数的信息量对其排序有影响，应给出模糊数信息量计算公式，并在模糊数排序时

加入对信息量的考虑，给出综合其模糊均值、模糊标准差、信息量的限位系数概念，通过它对模糊数进行排序.

定义 1 设模糊数 A，$s(A)$，$\mu_A(x)$ 分别为 A 的承集及隶属函数，定义

$$\overline{X}(A)=\frac{\int_{s(A)}x\mu_A(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{s(A)}\mu_A(x)\,\mathrm{d}x} \tag{1}$$

$$\sigma(A)=\left[\frac{\int_{s(A)}x^2\mu_A(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{s(A)}\mu_A(x)\,\mathrm{d}x}-\overline{X}^2(A)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

分别称 $\overline{X}(A)$ 和 $\sigma(A)$ 为模糊数的模糊均值和模糊标准差.

特别地，当 A 为三角模糊数 $A=(l,m,n)$ 时，分别计算可得

$$\overline{X}(A)=\frac{1}{3}(l+m+n) \tag{3}$$

$$\sigma(A)=\frac{1}{18}(l^2+m^2+n^2-lm-ln-mn) \tag{4}$$

定义 2 设 A 是 $[a,b]$ 上的模糊数，称

$$E(A,x_0)=2(\mu_A^2(x_0)+\mu_{A'}^2(x_0))-1$$

为 A 在 x_0 的信息量；

$$E(A)=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b E(A,x)\,\mathrm{d}x$$

为模糊 A 在 $[a,b]$ 上的信息量.

当 A 为三角模糊数 $A=(l,m,n)$ 时，计算可得

$$E(A)=1-\frac{2(n-l)}{3(b-a)}$$

定义 3 设 $\overline{X}$ 和 σ 分别为模糊数 A 的模糊均值和模糊标准差，称

$$\rho(A)=E(A)\overline{X}+(E(A)-1)\sigma \tag{5}$$

为模糊数 A 的限位系数.

综合排序准则：对于模糊数 A 和 B，取得较大的限位系数 ρ 的模糊数较大. 即若 $\rho(A)\geqslant\rho(B)$，则 $A\geqslant B$.

容易验证，实数作为模糊数的极限情形，它的限位系数就是其本身，因而由上述准则所确定的实数序具有一致性. 并且在模糊的信息量 $E(A)$ 较大（趋于 1）时，限位系数突出了模糊均值的作用；在模糊数的信息量 $E(A)$ 较小时，限位系数突出了反映"分散程度"的指标——模糊标准差的作用，所以限位系数综合考虑了模糊均值、模糊标准差、信息量对其位置的影响. 限位系数中模糊均值、模糊标准差的组合系数直接由信息量给出，具有高稳定性、易操作的特点.

2.2 层次分析法

层次分析法（the analytical hierarchy process，简称 AHP）在 20 世纪 70 年代首创于美国，这是一种定性和定量相结合的、系统化、层次化的分析方法．由于它在处理复杂的决策问题上的实用性和有效性，很快就在世界范围内得到普遍的重视和广泛的应用．

层次分析法是模仿人们对复杂决策问题的思维、判断过程进行构造的，这种方法将决策者的思维过程数量化，将复杂的问题分解为各个组成因素，再将这些因素按支配关系分成若干组，形成有序的递阶层次结构，通过两两比较的方式确定层次中诸因素相对重要性的总排序，即分解、判断、综合．要经过建立递阶层次结构、构造两两比较矩阵、计算各要素的权重、计算当前一层元素关于总的目标的排序权重等步骤．

2.3 构造模糊判断矩阵

由 C 次测试或调查，就某因素对其相关的下一层全部 n_k 个因素的评价或重要性进行两两比较，结果以模糊数定量表示，得 n_k 阶模糊判断矩阵 $\boldsymbol{A}$．设 $A=(a_{ij})$，其中可设元素 $a_{ij}=(l_{ij}, m_{ij}, n_{ji})$ 是三角模糊数．

2.4 建立层次结构模型

利用层次分析法解决问题可分如下三步进行：

第一层：目标层．这层只有一个元素，就是决策问题的预定目标．

第二层：准则层．包括所有为实现目标所涉及的中间环节．在进行定位评估时往往不是直接进行比较．因为存在许多不可比因素，比较直接的方法是选取一些中间评价标准，即准则层的元素．

第三层：子准则层．准则层中的每个因素包含的评价标准又构成子准则层，它受准则层的支配．

2.5 构造判断矩阵

以 A 表示目标，表示评价因素 $u_i \in U$ ($i=1, 2, \cdots, n$)．表示 u_i 对 u_j ($j=1, 2, \cdots, n$)的相对重要性数值，u_{ij}的取值依表 1 进行．

表 1　判断矩阵标度及其含义

标度	含　　义
1	表示因素 u_i 与 u_j 比较，具有同等重要性
3	表示因素 u_i 与 u_j 比较，u_i 比 u_j 稍微重要
5	表示因素 u_i 与 u_j 比较，u_i 比 u_j 明显重要
7	表示因素 u_i 与 u_j 比较，u_i 比 u_j 强烈重要
9	表示因素 u_i 与 u_j 比较，u_i 比 u_j 极端重要
2，4，6，8	2，4，6，8 分别表示相邻判断 1 和 3，3 和 5，5 和 7，7 和 9 的中值
倒数	表示因素 u_i 与 u_j 比较得判断 u_{ij}，则 u_j 与 u_i 比较得判断 $u_{ji}=1/u_{ij}$

根据上述各符号的意义得矩阵 $\boldsymbol{P}$

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{matrix} \end{array}$$

例如，给定

$$\boldsymbol{P}=\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 7 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 5 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 3 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 3 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{matrix} \end{array}$$

称之为 A-U 判断矩阵.

2.6 计算重要性排序

根据 A-U 矩阵，求出最大特征根所对应的特征向量. 所求特征向量即为各评价因素重要性排序，也就是权数分配. A-U 判断矩阵特征向量的求法：

（1）例 1 方根法.

① 计算判断矩阵每一行元素的乘积 M_i:

$$M_i=\prod_{j=1}^{n}u_{ij},\quad (i,j=1,2,3,\cdots,n)$$

② 计算 M_i 的 n 次方根 $\overline{W_i}$：

$$\overline{W_i}=\sqrt[n]{M_i}$$

③ 对向量 $\overline{W}=\left(\overline{W_1},\ \overline{W_2},\ \cdots,\ \overline{W_n}\right)^{\mathrm{T}}$ 作归一化或正规化处理，即

$$W_i=\frac{\overline{W_i}}{\sum_{j=1}^{n}\overline{W_j}}$$

则 $\boldsymbol{W}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 即为所求特征向量.

④ 计算判断矩阵的最大特征根 $\lambda_{\max}$:

$$\lambda_{\max}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\boldsymbol{PW})_i}{nW_i}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(\boldsymbol{PW})_i}{W_i} \tag{6}$$

式中，$(\boldsymbol{PW})_i$ 表示向量 $\boldsymbol{PW}$ 的第 i 个元素．则

$$\boldsymbol{PW}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{PW})_1\\(\boldsymbol{PW})_2\\\vdots\\(\boldsymbol{PW})_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&\cdots&u_{1n}\\u_{21}&u_{22}&\cdots&u_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\u_{n1}&u_{n2}&\cdots&u_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}W_1\\W_2\\\vdots\\W_n\end{pmatrix}\tag{7}$$

对上面所给定的 A-U 判断矩阵 $\boldsymbol{P}$，有

$$\overline{W_1}=\left(1\times\frac{1}{5}\times7\times5\times5\right)^{\frac{1}{5}}=2.036\,168$$

$$\overline{W_2}=(5\times1\times9\times7\times5)^{\frac{1}{5}}=4.359\,695$$

$$\overline{W_3}=\left(\frac{1}{7}\times\frac{1}{9}\times1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}=0.281\,373\,6$$

$$\overline{W_4}=\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{7}\times3\times1\times2\right)^{\frac{1}{5}}=0.702\,775\,5$$

$$\overline{W_5}=\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times3\times\frac{1}{2}\times1\right)^{\frac{1}{5}}=0.569\,679$$

然后对向量 $\overline{\boldsymbol{W}}=(\overline{W_1},\overline{W_2},\overline{W_3},\overline{W_4},\overline{W_5})$ 作正规化归一化处理，即取 $\overline{W_i}=\dfrac{\overline{W_i}}{\sum_{j=1}^{n}\overline{W_j}}$，于是有所求特征向量：

$$\boldsymbol{W}=(0.256\,1,\ 0.548\,4,\ 0.035\,4,\ 0.088\,4,\ 0.071\,7)$$

$$\boldsymbol{PW}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{PW})_1\\(\boldsymbol{PW})_2\\\vdots\\(\boldsymbol{PW})_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{5}&7&5&5\\5&1&9&7&5\\\frac{1}{7}&\frac{1}{9}&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{5}&\frac{1}{7}&3&1&2\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&3&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.2561\\0.5484\\0.0354\\0.0884\\0.0717\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.414\,08\\3.124\,8\\0.186\,29\\0.467\,65\\0.383\,00\end{pmatrix}$$

那么

$$\lambda_{\max}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{(\boldsymbol{PW})_i}{W_i}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1.414\,08}{0.256\,1}+\frac{3.124\,8}{0.548\,4}+\frac{0.186\,29}{0.035\,4}+\frac{0.467\,56}{0.088\,4}+\frac{0.383\,0}{0.071\,7}\right)=5.422\,58$$

（2）**例 2**　和积法．

① 将判断矩阵每一列归一化：

$$\bar{u}_{ij} = \frac{u_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} u_{kj}}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

② 每一列正规化的判断矩阵按行相加：

$$\overline{W_i} = \sum_{j=1}^{n} \bar{u}_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

③ 对向量 $\overline{W} = \left(\overline{W_1}, \ \overline{W_2}, \ \cdots, \ \overline{W_n}\right)^{\mathrm{T}}$ 作正规化处理：

$$W_i = \frac{\overline{W_i}}{\sum_{j=1}^{n} \overline{W_j}}, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

依此所得到 $W = (W_1, W_2, \cdots, W_n)^{\mathrm{T}}$ 即为所求的特征向量．

计算判断矩阵最大特征 $\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \cdot \sum \frac{(PW)_i}{W_i}$．例如，设 A-U 判断矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 7 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 5 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 3 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 3 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

根据步骤 ①，得到正规化的判断矩阵：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6.5429} & \frac{1/5}{1.6540} & \frac{7}{23.0000} & \frac{5}{13.8333} & \frac{5}{13.3333} \\ \frac{5}{6.5429} & \frac{1}{1.6540} & \frac{9}{23.0000} & \frac{7}{13.8333} & \frac{5}{13.3333} \\ \frac{1/7}{6.5429} & \frac{1/9}{1.6540} & \frac{1}{23.0000} & \frac{1/3}{13.8333} & \frac{1/3}{13.3333} \\ \frac{1/5}{6.5429} & \frac{1/7}{1.6540} & \frac{3}{23.0000} & \frac{1}{13.8333} & \frac{2}{13.3333} \\ \frac{1/5}{6.5429} & \frac{1/5}{1.6540} & \frac{3}{23.0000} & \frac{1/2}{13.8333} & \frac{1}{13.3333} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1528 & 0.1209 & 0.3043 & 0.3614 & 0.3750 \\ 0.7642 & 0.6046 & 0.3913 & 0.5060 & 0.3750 \\ 0.0218 & 0.0672 & 0.0435 & 0.0241 & 0.0250 \\ 0.0306 & 0.0864 & 0.1304 & 0.0723 & 0.1500 \\ 0.0306 & 0.1209 & 0.1304 & 0.0361 & 0.0750 \end{pmatrix}$$

依步骤 ②，有

$$\overline{W_1} = 0.1528 + 0.1209 + 0.3043 + 0.3614 + 0.3750 = 1.3146$$

$$\overline{W_2} = 0.7642 + 0.6046 + 0.3913 + 0.5060 + 0.3750 = 2.6411$$

$$\overline{W_3} = 0.0218 + 0.0672 + 0.0435 + 0.0241 + 0.0250 = 0.1816$$

$$\overline{W_4} = 0.0306 + 0.0864 + 0.1304 + 0.0723 + 0.1500 = 0.4697$$

$$\overline{W_5} = 0.0306 + 0.1209 + 0.1304 + 0.0361 + 0.0750 = 0.3931$$

对向量 $\overline{W} = (1.3146, 2.6411, 0.01816, 0.4697, 0.3931)^{\mathrm{T}}$ 归一化，得

$$W_1 = \frac{\overline{W_1}}{\sum_{j=1}^{3}\overline{W}_j} = \frac{1.3146}{1.3146 + 2.6411 + 0.1816 + 0.4697 + 0.3931} = 0.2629$$

$$W_2 = \frac{\overline{W_2}}{\sum_{j=1}^{3}\overline{W}_j} = \frac{2.6411}{1.3146 + 2.6411 + 0.1816 + 0.4697 + 0.3931} = 0.5282$$

$$W_3 = \frac{\overline{W_3}}{\sum_{j=1}^{3}\overline{W}_j} = \frac{0.1816}{1.3146 + 2.6411 + 0.1816 + 0.4697 + 0.3931} = 0.0363$$

$$W_4 = \frac{\overline{W_4}}{\sum_{j=1}^{3}\overline{W}_j} = \frac{0.4697}{1.3146 + 2.6411 + 0.1816 + 0.4697 + 0.3931} = 0.0939$$

$$W_5 = \frac{\overline{W_5}}{\sum_{j=1}^{3}\overline{W}_j} = \frac{0.3931}{1.3146 + 2.6411 + 0.1816 + 0.4697 + 0.3931} = 0.0786$$

则所求特征向量 $W = (0.2629,\ 0.5282,\ 0.0363,\ 0.0939,\ 0.0786)^{\mathrm{T}}$. 由

$$PW = \begin{pmatrix} (PW)_1 \\ (PW)_2 \\ \vdots \\ (PW)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 7 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 5 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & 3 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 3 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.2629 \\ 0.5282 \\ 0.0363 \\ 0.0939 \\ 0.0786 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.4855 \\ 3.2202 \\ 0.1901 \\ 0.4882 \\ 0.3928 \end{pmatrix}$$

那么

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \cdot \sum \frac{(PW)_i}{W_i} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1.4855}{0.2629} + \frac{3.2202}{0.5282} + \frac{0.1901}{0.0363} + \frac{0.4882}{0.0939} + \frac{0.3928}{0.0786} \right) = 5.4347$$

以上两种求 A-U 判断矩阵特征向量的方法各有优劣. 但对最大特征的精确度都达到了相当的程度. 在具体运用中可根据实际情况及已知数据的特殊性与规律性采用不同的求解方法.

2.7 检 验

以上得到的特征向量即为所求权数，那么权数的分配是否合理？这需要对判断矩阵进行一致性检验．检验使用公式

$$CR=\frac{CI}{RI}$$

其中，CR 称为判断矩阵的随机一致性比率，CI 称为判断矩阵的平均随机一般一致性指标．它由下式给出：

$$CI=\frac{1}{n-1}(\lambda_{max}-n)$$

RI 称为判断矩阵的平均随机一致性指标．对于 1～9 阶段判断矩阵，RI 值列于表 2

表 2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

当 $CR<0.10$ 时，即认为判断矩阵具有满意的一致性，说明权数分配是合理的；否则，就需要调整判断矩阵，直到取得具有满意的一致性为止．

对例 1，已求得 $\lambda_{max}=5.422\,58$，则

$$CI=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}=\frac{5.422\,58-5}{5-1}=0.105\,64$$

$$CR=\frac{CI}{RI}=\frac{0.105\,64}{1.12}=0.094\,32<0.10$$

表明该例中的判断矩阵具有满意的一致性，因此 $W=(0.256\,1, 0.548\,4, 0.035\,4, 0.088\,4, 0.071\,7)$ 的各个分量可以作为相应的评价指标 u_1，u_2，u_3，u_4，u_5 的权系数．即是说 $W=(0.256\,1,\ 0.548\,4,\ 0.035\,4,\ 0.088\,4,\ 0.071\,7)$ 可作为权重向量．

对例 2，有 $\lambda_{max}=5.434\,7$，则

$$CI=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}=\frac{5.434\,7-5}{5-1}=0.108\,7$$

$$CR=\frac{CI}{RI}=\frac{0.108\,7}{1.12}=0.098\,87<0.10$$

表明该例中的判断矩阵具有满意的一致性，即是说 $W=(0.262\,9,\ 0.528\,2,\ 0.036\,3,\ 0.093\,9,\ 0.078\,6)^T$ 可作为权重向量．

3 模糊层次分析法的一般步骤

由以上的相关概念及方法可总结出这种分析方法的一般步骤：

第一步，根据决策对象画出层次分析图（见图 1）：

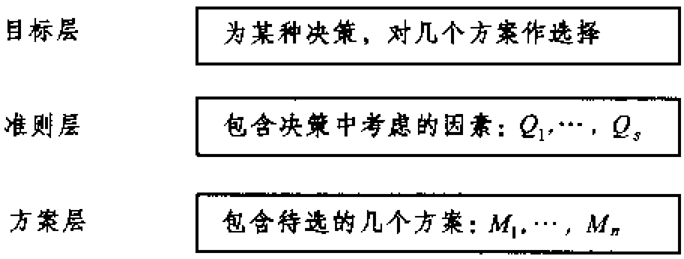


图 1

第二步，打分.（1）根据决策的要求，对准则层中各因素的重要性打分，得到权向量 $\boldsymbol{Q}=(q_1,$ $q_2,\ \cdots,\ q_s)$. 这里 q_s 是第 i 个因素 $\boldsymbol{Q}$ 的权重，满足条件 $q_i\geqslant 0$，且 $\sum_{i=1}^{s}q_i=1$. $q_j\geqslant 0$ 即意味着可不考虑因素 Q_j 的影响. 不同于得分向量，条件 $\sum_{i=1}^{s}q_i=1$ 是权向量必须满足的一个条件.（2）把准则层中每一个因素 $\boldsymbol{Q}$ 在 n 个待选方案中比较优劣，在区间 [0，1] 内酌情打分，得到第 i 个因素 $\boldsymbol{Q}$ 在 n 个待选方案中的得分向量：

$$\boldsymbol{P}_i=(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{in}),\quad (i=1,2,\cdots,s)$$

以 P_i 作为矩阵的第 i 行，得到一个 s 行 n 列的矩阵 $\boldsymbol{P}$：

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

权向量 $\boldsymbol{Q}=(q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_s)$ 可视为 1 行 s 列的矩阵.

第三步，计算. 按矩阵的乘法，作出 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{P}$ 的乘积

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{P}=(q_1,q_2,\cdots,q_s)\cdot\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

相乘结果是一个 1 行 n 列的矩阵，其中

$$a_i=q_1p_{1i}+q_2p_{2i}+\cdots+q_sp_{si}=\sum_{k=1}^{s}q_kp_k,\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

第四步，选择. 根据向量（$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$），选择得分最高者即可. 若出现若干个方案最高分相等的情形，可先将其他方案淘汰，对保留方案重新审视，打分，选择. 必要时增减一些因素.

上面出现的那些得分向量和权重向量在模糊数学中都称作模糊集，矩阵称作模糊矩阵. 所以上面的决策方法就叫做模糊层次分析法.

在较为庞大的决策问题中，准则层涉及的因素较为复杂．可先从几个大的方面分成几大类，这就是第一层因素．再将每一大类因素细分为若干中等大小的因素，成为第二层因素．若有必要，还可将第二层因素继续细分．因素分得越细，各细分因素越为单纯，就越便于打分．因素分得粗略时，可使因素数目减少，便于决策者统筹考虑．最原始的打分工作，只在最细分的一层因素集内进行，其上面各层因素的得分是根据下层各因素的权重及得分用模糊层次分析法计算出来的．

模糊层次分析法在配权重及打分时，是对所有的因素或方案放在一起做全盘比较的，所以因素数目和方案数目不易设得太多．经验表明，这个数目不要大于 9．一起考虑的因素数目大于 9 时，人脑已难以全面顾及．若因素数目太多，可将因素分类分组，化为多层次分析．若方案数目太多，也可将方案分为几组评判，再将各组的最优者放在一起分析评判．

4 模糊层次分析法在教学质量评估中的应用

4.1 评价指标及调查方案

假设教学质量评估中包含的主要内容有：教学态度、教学内容、教学方法、教学效果等，本文选取了 18 个评价指标，要求学生以五个等级（很同意，同意，一般，不同意，很不同意）回答以下 18 个问题：

C_1—教师的教学使我对该学科的兴趣提高了；

C_2—教师的教学使我理解并学会了该课程内容；

C_3—教师的教学使我认识和解决问题的能力提高了；

C_4—教师的教学使我学会了该学科的学习方法；

C_5—我感到教师对教学热诚，教课时充满活力；

C_6—我感到教师对讲课内容和方法做了精心准备；

C_7—教师的讲课方式有助于学生做笔记；

C_8—教师的讲课能促进学生思维，富有启发性；

C_9—教师鼓励学生参与课堂讨论，发表不同观点；

C_{10}—教师能充分讨论本学科发展前沿；

C_{11}—教师课上除讲他人观点；也讲自己观点；

C_{12}—教师能合理应用现代教育技术手段；

C_{13}—教师鼓励我们提出问题，并能认真解答；

C_{14}—讲授专业名词术语时能同时用英语表述；

C_{15}—教师在作业上给的指导及反馈很有价值；

C_{16}—教师讲课深浅度适合学生理解水平；

C_{17}—教师讲课内容量适合学生掌握；

C_{18}—教师对每个同学都很友善，真诚关心学生．

调查以填涂答题卡的形式进行，然后由计算机判读，得到每个学生对任课教师的课堂教学

质量的等级评价数据.

4.2 综合评价模型

4.2.1 多层次模型

根据层次分析法，我们将评价总目标 A——学生对教师的教学质量评价分解成三个层次（见图 2），$A=\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$，其中，教学态度 $B_1=\{C_5, C_6, C_{18}\}$，教学内容 $B_2=\{C_{10}, C_{11}, C_{16}, C_{17}\}$，教学方法 $B_3=\{C_7, C_8, C_9, C_{12}, C_{13}, C_{14}\}$，教学效果 $B_4=\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_{15}\}$，$C_i\,(i=1, 2, \cdots, 18)$ 为评价指标.

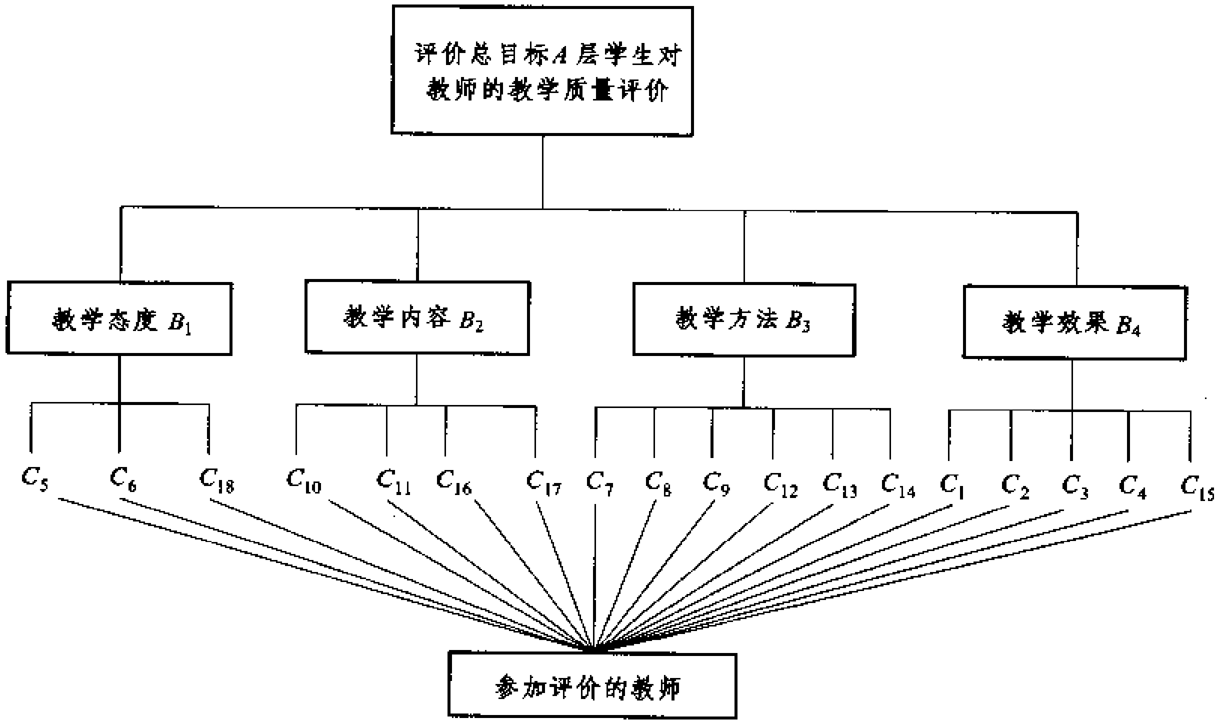


图 2　教师质量评价体系层次结构图

某位教师的教学质量评价，由其所任班级的每个学生对每个评价指标给出等级评价，一个等级出现的频率 $P_{kl}^{(i)}$ 作为元素，构成次级评价目标 B_i 的评判矩阵 $R_i\,(i=1, 2, 3, 4)$，即 $R_i=(P_{kl}^{(i)})_{n_i\times 5}$，其中 $n_1=3$，$n_2=4$，$n_3=6$，$n_4=5$. 假设 C 层次级指标对 B 层次指标 B_i 的权重向量为 $W_i=(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \cdots, a_{n_i}^{(i)})$，由 Matlab 拟合成模糊数的隶属函数，则可以得 B_i 的综合评判矩阵：

$$\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{R}_i=(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \cdots, a_{n_i}^{(i)})\begin{pmatrix} P_{11}^{(i)} & P_{12}^{(i)} & P_{13}^{(i)} & P_{14}^{(i)} & P_{15}^{(i)} \\ P_{21}^{(i)} & P_{22}^{(i)} & P_{23}^{(i)} & P_{24}^{(i)} & P_{25}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n_i1}^{(i)} & P_{n_i2}^{(i)} & P_{n_i3}^{(i)} & P_{n_i4}^{(i)} & P_{n_i5}^{(i)} \end{pmatrix},\quad (i=1,2,3,4)$$

再对上一级目标 $\boldsymbol{A}=(P_1, P_2, P_3, P_4)$ 作综合评价. 由次级评价结果，及公式（3）～（7）计算得总目标的评判矩阵 $\boldsymbol{R}=(P_1, P_2, P_3, P_4)^{\mathrm{T}}$. 假设 B 层指标对总目标的权重向量为 $\boldsymbol{W}=(a_1, a_2, a_3, a_4)$，则可计算总目标的综合评判结果为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}$.

4.2.2 权向量的确定

为了客观确定各评价指标在相应的评价项目中的重要性程度，我们在学生中作问卷调查．问卷要求学生将各评价指标在各评价项目中按重要性程度递减排序．根据调查结果，依据层次分析法常用的 1～9 的尺度，建立总目标教学质量 A，教学态度 B_1，教学内容 B_2，教学方法 B_3，教学效果 B_4 的成对比较矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&1/3&1/5\\1/3&1&1/3&1/4\\3&3&1&1/3\\5&4&3&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&1/3&3\\3&1&5\\1/3&1/5&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1&1/3&5&6\\3&1&5&6\\1/5&1/5&1&3\\1/6&1/6&1/3&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}1&5&5&6&7&9\\1/5&1&3&4&4&7\\1/5&1/3&1&3&4&7\\1/6&1/4&1/3&1&3&5\\1/7&1/4&1/4&1/3&1&3\\1/9&1/7&1/7&1/5&1/3&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}1&1/3&3&2&7\\3&1&4&3&5\\1/3&1/4&1&1/3&5\\1/2&1/3&3&1&5\\1/7&1/5&1/5&1/5&1\end{pmatrix}$$

依据有成对比较矩阵求权向量的特征根法，计算各比较矩阵的特征值及特征向量，得到数据如下：

$$\boldsymbol{W}=(0.132\,9,\ 0.080\,5,\ 0.251\,5,\ 0.535\,1)$$

$$\boldsymbol{W}_1=(0.258\,3,\ 0.637,\ 0.104\,7)$$

$$\boldsymbol{W}_2=(0.308\,3,\ 0.537\,1,\ 0.101\,1,\ 0.535)$$

$$\boldsymbol{W}_3=(0.498\,4+0.213\,3+0.137\,7+0.079\,7+0.046\,5+0.024\,6)$$

$$\boldsymbol{W}_4=(0.2484,\ 0.430\,8,\ 0.102\,9,\ 0.177\,4,\ 0.040\,5)$$

各比较矩阵的一致性指标分别为

$$\mathrm{CI}_{B_1}=0.019\,3,\quad \mathrm{CI}_{B_2}=0.087\,2,\quad \mathrm{CI}_{B_3}=0.115\,3,$$

$$\mathrm{CI}_{B_4}=0.097\,7,\quad \mathrm{CI}_{A}=0.086\,4$$

一致性指标比率分别为

$$\mathrm{CR}_{B_1}=0.037,\quad \mathrm{CR}_{B_2}=0.097\,9,\quad \mathrm{CR}_{B_3}=0.091\,5,$$

$$\mathrm{CR}_{B_4}=0.087\,2,\quad \mathrm{CR}_{A}=0.095$$

由于都小于 0.1，故通过了一致性检验．因此，上述 $\boldsymbol{W}_1$，$\boldsymbol{W}_2$，$\boldsymbol{W}_3$，$\boldsymbol{W}_4$，$\boldsymbol{W}$ 可作为权重向量．

4.2.3 模型的应用

现有某个教师的授课质量评估调查结果（见表 3）．

表 3　某教师授课质量评估调查结果统计表

等级 \ 人数 \ 指标	B_1			B_2				B_3						B_4				
	C_5	C_6	C_{18}	C_{10}	C_{11}	C_{16}	C_{17}	C_7	C_8	C_9	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_1	C_2	C_3	C_4	C_{15}
A	17	18	22	7	11	34	25	30	17	17	29	12	28	16	17	19	17	10
B	71	79	73	47	40	59	88	82	62	57	54	43	80	77	56	80	79	22
C	76	63	59	74	87	62	51	55	72	80	75	91	49	74	75	54	60	58
D	13	15	23	41	37	20	13	9	24	20	23	28	18	10	24	21	18	58
E	2	4	2	10	4	4	2	3	4	5	1	5	4	2	7	5	5	31
参加调查学生总数	180																	

那么该教师的教学态度 B_1 的评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}0.0944 & 0.3944 & 0.4222 & 0.0722 & 0.0111\\ 0.1000 & 0.4389 & 0.3500 & 0.0833 & 0.0222\\ 0.1222 & 0.4056 & 0.3278 & 0.1278 & 0.0111\end{pmatrix}$$

教学内容 B_2 的评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}0.0389 & 0.2611 & 0.4111 & 0.2278 & 0.0556\\ 0.0611 & 0.2222 & 0.4833 & 0.2056 & 0.0222\\ 0.1889 & 0.3278 & 0.3444 & 0.1111 & 0.0222\\ 0.1389 & 0.4889 & 0.2833 & 0.0722 & 0.0111\end{pmatrix}$$

教学方法 B_3 的评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}_3=\begin{pmatrix}0.1667 & 0.4556 & 0.3056 & 0.0500 & 0.0167\\ 0.0944 & 0.3444 & 0.4000 & 0.1333 & 0.0222\\ 0.0944 & 0.3167 & 0.4444 & 0.1111 & 0.0278\\ 0.1611 & 0.3000 & 0.4167 & 0.1278 & 0.0056\\ 0.0667 & 0.2389 & 0.5056 & 0.1556 & 0.0278\\ 0.1556 & 0.4444 & 0.2722 & 0.1000 & 0.0222\end{pmatrix}$$

教学效果 B_4 的评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}_4=\begin{pmatrix}0.0889 & 0.4278 & 0.4111 & 0.0556 & 0.0111\\ 0.0944 & 0.3111 & 0.4167 & 0.1333 & 0.0389\\ 0.1056 & 0.4444 & 0.3000 & 0.1167 & 0.0278\\ 0.0944 & 0.4389 & 0.3333 & 0.1000 & 0.0278\\ 0.0556 & 0.1222 & 0.3222 & 0.3222 & 0.1722\end{pmatrix}$$

次级目标（B 层）的综合评判矩阵为

$$\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{R}_2=(0.0713\quad 0.2591\quad 0.463\quad 0.1958\quad 0.0319)$$

$$\boldsymbol{P}_3=\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{R}_3=(0.1360\quad 0.3901\quad 0.3622\quad 0.0885\quad 0.0192)$$

$$\boldsymbol{P}_4=\boldsymbol{W}_4\boldsymbol{R}_4=(0.0926\quad 0.3688\quad 0.3847\quad 0.1140\quad 0.0343)$$

构成总目标（A 层）的评判矩阵为

$$R=\begin{pmatrix}P_1\\P_2\\P_3\\P_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.1009 & 0.4239 & 0.3663 & 0.0851 & 0.0182\\0.0713 & 0.2591 & 0.4363 & 0.1958 & 0.0319\\0.1360 & 0.3901 & 0.3622 & 0.0885 & 0.0192\\0.0926 & 0.3688 & 0.3847 & 0.1140 & 0.0343\end{pmatrix}$$

由权向量 $W=(0.1329\quad 0.0805\quad 0.2515\quad 0.5351)$ 可得总目标的综合评判矩阵为

$$P=WR=(0.1029\quad 0.3727\quad 0.3807\quad 0.1104\quad 0.0281)$$

如果用百分制给评价等级赋值，则有（见表 4）.

表 4

等级	A	B	C	D	E
分数	95	80	70	60	45

记 $T=(95\quad 80\quad 70\quad 60\quad 45)^{\mathrm{T}}$，则可计算出该教师的各项教学质量评价项目得分分别为

$$F_{P_1}=P_1T=75.0629,\quad F_{P_2}=P_2T=71.2299,\quad F_{P_3}=P_3T=75.6578,\quad F_{P_4}=P_4T=73.6180$$

综合评价得分为：$F_P=PT=74.1308$，属于中级水平.

我们抽样调查了 1 631 位学生，对担任数学类课程的 13 位教师的课堂教学质量进行了评估. 涉及 11 个专业，2 个年级，6 门课程. 用上述方法，计算出 13 位教师的评价结果，见表 5

表 5 数学课程教学质量评估抽样调查评价统计表

教师＼得分	综合评价矩阵 P					态度 F_{P_1}	态度 F_{P_2}	态度 F_{P_3}	态度 F_{P_4}	综合得分
1	0.2733	0.3934	0.2683	0.0444	0.0212	80.6607	76.2699	81.3326	79.3972	79.8001
2	0.2084	0.3458	0.3767	0.0596	0.0096	80.1225	75.7166	78.3006	77.3696	77.8365
3	0.3480	0.4118	0.1996	0.0345	0.0062	85.1511	79.0234	85.8406	80.4606	82.3213
4	0.2566	0.4107	0.2788	0.0443	0.0105	81.0759	76.1611	80.0627	79.9433	79.8149
5	0.5135	0.3235	0.1433	0.0159	0.0039	88.6589	82.5970	86.5016	85.2819	85.8213
6	0.1467	0.2572	0.3648	0.1417	0.0896	69.9228	70.1627	71.8112	73.9778	72.5869
7	0.2598	0.3829	0.2888	0.0551	0.0134	79.4202	76.2705	79.2877	79.9977	79.4423
8	0.4714	0.3754	0.1422	0.0076	0.0035	87.2748	83.9676	87.0377	84.3403	85.3787
9	0.1031	0.3724	0.3828	0.1133	0.0287	75.3135	71.5842	75.9833	73.9599	74.4574
10	0.2846	0.4382	0.2335	0.0364	0.0073	82.9781	78.4700	81.9459	80.3639	80.9567
11	0.2549	0.3883	0.2819	0.0673	0.0076	80.0466	74.5596	79.9567	79.6941	79.3936
12	0.2397	0.4336	0.2694	0.0455	0.0118	79.6508	76.7429	79.8592	79.8659	79.5843
13	0.2084	0.6545	0.1012	0.0239	0.0122	83.2766	80.7929	83.7515	79.5837	81.2200
总体	0.2801	0.3676	0.2641	0.0626	0.0258	80.1766	76.6305	80.1791	79.2788	79.4114

用上述方法，可以计算出所有参加抽样调查的学生对 13 位教师的各项评价指标的得分，分别为 $F_{C_1}=81.42$，$F_{C_2}=78.42$，$F_{C_3}=79.60$，$F_{C_4}=78.87$，$F_{C_5}=78.32$，$F_{C_6}=80.99$，$F_{C_7}=81.76$，$F_{C_8}=77.89$，$F_{C_9}=78.94$，$F_{C_{10}}=76.25$，$F_{C_{11}}=76.18$，$F_{C_{12}}=79.27$，$F_{C_{13}}=78.49$，$F_{C_{14}}=80.36$，

$F_{C_{15}}=76.26$，$F_{C_{16}}=78.23$，$F_{C_{17}}=80.32$，$F_{C_{18}}=79.81$.

4.2.4 结果分析

从抽样调查统计表可以看出：教师们的教学态度是好的，但教学内容已不适应当代大学生的要求．从总体的指标得分来看，各项指标的得分都在 76 分以上，说明数学类课程的教学质量整体上接近良好层次，这是值得肯定的．但是，教师的教学模式传统化，没有在这方面得到学生的肯定．

在教学态度方面，得到学生的认可，但没有调动学生的学习积极性．在教学内容方面，教师很好地把握了教学大纲，但没有充分考虑学生的理解能力和接受能力，也较少介绍自己的学术观点和本学科的发展．在教学方法方面，教师的讲课方式过于传统，但学生能较好地做笔记．在教学效果方面，学生的学习能力有所提高，但“学时少，内容多”的矛盾也暴露无遗．

4.2.5 提高教学质量的对策及教改建议

针对近几年来的扩招，学生的学习能力整体下降，教师队伍的扩充远跟不上学生人数的急剧上升速度，教师（特别是基础课教师）超负荷运转、身心疲惫等现实．下面对如何提高教学质量也提出如下建议：第一，加强师资队伍建设，使教师队伍的扩充能满足扩招要求；加强对教师（特别是青年教师）爱岗敬业的职业道德教育，建立良好的管理机制和激励政策，激发教师潜能，调动他们的积极性，以良好的心态、高昂的激情走上讲坛，从而激发学生的学习激情和活力．第二，加强教学硬、软件的建设，合理利用多媒体设备、课件，提高教学效率．第三，建立良好的学术交流平台，让教师有更多的机会接受新思想，学习新方法，了解学科新动向，提倡启发式教学和双语教学，改变传统的教学方法．第四，改革教学内容，从分析结果来看，数学类课程改革的首要任务是对教学内容进行大力度的改革，加强数学思想的传递，将“重基础，宽口径”的教育思想贯策到教学活动中，解决多年来“内容多，学时少”的难题．

5 结 论

运用模糊层次分析法建立综合素质评估体系对教师进行评估，是改革评估方法的新尝试．在实际应用中，该法数据处理方便，结论客观合理，具有很强的可操作性．它能全面反映学生对教师课堂教学质量的评价，也可应用于其他类型的综合评价问题．评估结果作为信息反馈，可为领导决策及教改提供重要参考．希望在当今这个高速发展的社会里，模糊层次分析法能为日常生活中一些不便于判断的模糊现象给出既简捷又具有科学说服力的解决方法．

参 考 文 献

[1] 胡伟文，王胜兵，姜礼平．模糊层次分析法及在军校学员综合素质评估中的应用[J]．数学实践与认识，2003(10)

[2] 王琦．实用模糊数学[M]．北京：科学技术文献出版社，1995

[3] 唐有文．模糊层次分析法[J]．青海师范大学学报（自然科学版），2002（3）
[4] 姜启源．数学模型（第三版）[M]．北京：高等教育出版社，2003
[5] 马晓燕．模糊综合评判在学生素质培养制约系统评价中的应用[J]．大学数学，2003，19（1）：40～45

地方性本科院校数学实验课程体系建构

高　峰

【摘　要】随着高等教育改革的不断深入，多数高校都对"数学实验"这门新兴课程进行了探索和试点．本文从地方本科院校开设数学实验课为基本出发点，初步确立了数学实验的教学目的和意义、教学指导思想，并对本课程的现状进行了分析，基本确立了地方院校数学实验课程的教材、教学的内容、教学模式和考核形式及课程的评价体系等，还对开设课程的途径、与相近课程的区别和实施教学环节过程中需要注意的问题进行了讨论．

【关键词】数学实验　课程体系　建构

1　引　言

伴随着教育科学研究的日益深入，高等数学教育的课题也在不断深化和扩大，出现了许多新的研究分支．数学实验就是应运而生的一个新兴研究课题．它有别于数学建模，也有别于传统的数值实验课．它的研究对象、内容和研究方法都有自己的特点，已经形成了一个新的研究领域．它最早大约在 20 世纪 80 年代末出现于美国的一些大学，被称为"数学实验室"，重点是通过一系列的结合使用计算机的实验引导学生进入数学的境界．我国一些重点高校如像清华大学、北京大学、中国科大、上海交大等在 20 世纪 90 年代中期开始设置"数学实验"课，并且在近几年编写了一些教材、参考书．但是总的来说，"数学实验"课程的开设在我国还处于探索阶段，各院校在课程的指导思想、教学内容、教学模式和评价体系等各个方面都在试验和讨论之中，而对于起步较晚的一般地方本科院校来说，由于自身学校的特点、学生的认知结构等原因而不能完全照搬那些重点大学的课程体系和经验．因此，应该探讨一条符合一般本科院校数学实验教学的教学模式．

另一方面，由于科学技术和知识更新的速度加快，传统数学观念和教学方法已经跟不上当前形势的发展．面对这种新的形势，课堂教学如何由原来的单纯的传授知识型向培养学生的知识能力型转换？如何增强学生的竞争意识，提高教学过程的开放性，完成教学模式由封闭和被动型向开放型和主动型转换？如何合理地引入先进的科学技术、新方法和新概念，使传统与现代内容很好地结合起来？如何从"应试教育"的"刺激—反应—接纳—成果"（也就是灌输—接受—再灌输—成才）的行为主义的现状中改变过来？如何从行为主义指导下以"教"为核心，教师为教学的"主宰"，学生为教学的客体，成了被任意摆布灌输的"知识容器"中转变过来？

改变这种状况要做的事情之一便是：更新教育观念．将现代教育思想和理论、当代认知心理学的原理观点，运用到现代教育技术改革教育中来．特别是改变陈旧的传统教法，摸索、探讨课堂教学的新型模式，显得迫切和现实．

本文力求以全面提高学生的认知素质为目标，将摸索一套新型的数学实验教学模式当做切入点，通过对地方本科院校开设数学实验这门课程的全面论述，试图从根本上确立以学生为中心和主体的现代教育方式，达到以学生自我发展为本，全力促进他们的探索思维，激发他们学习数学的兴趣和应用数学的意识，培养他们创新能力．

2 地方本科院校办学特点

随着世界经济发展的区域化，各国的高等教育也呈现出区域化的发展趋势．高等教育与地方经济的关系越来越紧密，高校从“社会的边缘”走到了“社会的中心”．在我国，由于高等教育管理体制的改革，中央政府将不少高校的管理权下放给地方政府．同时，地方政府迫切需要以发展高等教育的方式来推动当地经济社会的发展，地方政府举办高等教育的积极性空前高涨．因此，地方高校呈现了良好的发展势头．目前，我国 1 000 余所普通高校中，地方高校已占到 70%，成为高等教育的主力军．能否充分发挥这支主力军的作用，直接影响到我国高等教育的发展，关系到“科教兴国”战略的实施，关系到全面建设小康社会目标的实现．

地方性本科院校是指地方非重点高校，由所在地地市主管主办的一般性普通高等院校．在经费来源上，它以“地市投资为主”，招生以本地生源为主，毕业生也一般在本地市就业，在省级高校体系与格局中一般处于低重心位置．这类高校肩负着为所在区域经济建设和社会发展服务的使命．

地方高校与名牌大学相比，没有悠久的办学历史和雄厚的办学实力，采取与名牌大学相同的发展策略很难取胜，只有立足于所在区域，积极主动地服务地方，通过自己发挥的作用和所作的贡献，争取地方政府和社会各界对学校的重视和支持，促进办学条件的改善，才能求得生存、发展，即“以贡献求发展，以服务求支持”．同时，也正由于没有悠久的办学历史，地方高校在学科专业发展上能够快速“调转船头”，在适应地方经济建设中具有很强的适应性．

根据地方高校的区域特点，我们可以看出地方本科院校的目标和层次定位，是由我国高等教育战略布局和区域分工、地市社会经济发展水平和高等教育需求以及自身的历史、条件、潜力所决定的．因为现实的社会人才需求决定了高等教育人才培养结构的梯次性，加之教育对象自身在知识素养方面的差异，决定了高等教育在对学生知识教育和能力培养的标准和目标方面的层次性．对大多数地方本科院校而言，其目标定位应是：在服务的区域范围方面，以为本地区社会和经济服务为主，在此基础上量力扩大服务的区域范围，在某些方面适量为本省和外省服务；在服务对象方面，以为广大基层、广大农村服务为主；在服务领域方面，由部分领域，逐渐向更广阔的领域扩展；办学层次定位应以本科层次为重点，兼顾专科层次，逐渐地有选择地适量地向更高层次提升；在人才培养规格和模式上，以应用型（实用型）、复合型、创业型为主，少量培养学术型、研究型，而不会盲目与大城市的重点院校攀比，不切实际地上档次，

追求“国内一流”、“世界一流”.

在师资方面，地方院校由于近几年的大规模扩招导致学生规模急剧扩大，师资队伍在数量上基本没有太大的增长，因此在师生结构、师生比上存在一些问题. 加之现今社会知识更新速度不断加快，知识总量迅速增长，每 2～3 年翻一番（甚至更快），新兴学科、交叉学科不断涌现，教师的知识更新落后于知识的增长与更新. 而且有些专业教师紧缺，教师工作负荷较重，精神上、身体上都严重透支，几乎没有时间搞科研，或进行其他形式的培训提高，从而严重影响教师专业水平、业务水平的“可持续发展”.

3　地方本科院校开设数学实验课的目的和意义

数学实验课是高等学校迎接 21 世纪数学教育改革的一门新课程. 中科院院士、数学教育家姜伯驹教授曾指出：“应当实验组织数学实验课程，在教师指导下探索某些理论或应用的课题，学生的新鲜想法借助教学软件可以迅速实现，在失败与成功中得到真知. 这种方式，变被动的灌输为主动的参与，有利于培养学生的独立工作能力和创新精神.”创新是国家兴旺发达的不竭动力，是一个民族进步的灵魂. 培养创新能力是 21 世纪对教育提出的艰巨任务，这需要迅速转变过去继承性的教育模式，树立创造性的教育观念，应用认知心理学的原理，把素质教育提高到一个新水平. 数学实验课的产生，正是适应了目前的这种社会需求.

开设这门课的目的，结合地方院校在人才培养规格和模式上，以应用型（实用型）、复合型、创业型为主的特点，总的来说应该是力求从全面提高地方本科院校学生的认知素质，让学生在学习数学实验课的过程中体会知识的形成过程；并且让学生学会独立使用各种先进的计算工具和信息传播技术来探索解决一些典型数学问题的方法，以培养学生的创新能力.

因此，开设这门课的目的和意义，主要出于对以下几个方面的考虑：

（1）开设数学实验课有助于培养学生的探索性思维和创造意识，培养学生的创新能力. 一方面由于所选实验课题一般都有多种解决方法可以给学生以发挥聪明才智的空间；另一方面学生通过实验“做数学”，在学习有关数学知识的同时可以学习到数学的思想和探索数学的方法.

（2）有助于激发学生的学习主动性. 在我院开设数学实验课的这几年中，我们可以看出：学习过程中相互合作和共同探讨的气氛，以及实验过程中逐步取得的成功，往往使学生把自己想象成数学家，沉醉于数学现象的探索，极大地提高了对数学的兴趣. 通过这门课程的学习，学生更喜欢主动地去读数学资料，更喜欢潜心钻研较难的问题，更喜欢提出问题并寻找规律，更习惯将论证整理清楚.

（3）有助于学生基本学习、自学、编程、书面表达和研究创新等多方面能力的培养，真正促进学生动手动脑能力的提高. 传统的数学教育注重培养学生的逻辑推理能力、几何直观能力和运算能力，但随着计算机的出现，以及数学在各个领域越来越广泛的应用，传统的一支笔、一张纸的数学推理方式已经不能适应当今社会大信息量的需要. 用实验的手段、归纳的方法，借助于计算机研究数学问题并应用数学知识解决实际问题的能力的培养正是当今社会对数学教育提出的新的要求.

（4）有助于学生复习、巩固、应用所学的数学知识，并为今后学习有关数学学科的高深内容架起一座桥梁．由于数学实验课的内容覆盖面广，但只需要各数学学科的初步知识，所以可以在大学二、三年级开设．通过本课程的学习，学生可以对数学科学众多的分支、丰富的内容以及广泛的应用有所了解，在以后的数学课程的学习上将会表现出更多的兴趣和信心．

（5）有助于现行的数学教学方法的改进．以计算机为手段，以数学软件为工具，通过直观的显示，使学生对数学教学中的有关概念和结论产生更深刻的认识，使课堂教学更为生动直观．

4 地方性本科院校数学实验课的指导思想

我国的高校通常分为四个层次，即研究型大学、教学研究型大学、教学型大学、高职高专．不同层次的高校，在学术贡献、人才培养、对社会的服务方式以及在高等教育中所发挥的功能、作用是不同的．因此，每个层次、每种类型的高校都有自己发展的独特空间．

我们根据地方高校自身历史、现实条件，准确地把握自身层次，找准自身定位，各就其位，各安其位，立足于自身定位层面上，挖掘潜力，优化资源配置，再以地方高校学生的认知结构为出发点，确定了地方本科院校“数学实验”课程的指导思想和原则：以计算机为基础，以学生为中心，以问题为主线，以培养能力为目的来组织教学；使学生了解和利用数学理论、方法和软件去分析和解决问题的全过程，培养学生的创造性和丰富的想象力；提高他们学习数学的兴趣和应用数学的意识与能力，使之在今后的工作中能经常想到用数学去解决问题，能将数学、计算机有机地结合起来解决实际问题．具体如下：

（1）坚持“以学生为主，教师引导”的原则开设数学实验课程，其目的是培养学生应用数学知识分析和解决实际问题的能力以及应用计算机进行科学计算的能力，以适应新时期所需要的高素质人才的需要．从理工科数学的角度来看，学生创新精神和能力的培养主要是通过应用数学来体现．理工科学生学习数学不是为了研究数学本身，主要是数学的应用．

数学实验课程的教学方式与传统的数学课程教学方式有所不同．我们认为，数学实验的教学模式应以学生独立操作为主，教师辅导为辅，发挥在计算机支持下协同工作的功能，学生主动学习、教师指导监督等各方面的优势，充分利用学生交流、研讨、相互促进的“群体效应”来提升教学效果．在教学过程中，教师经常提出一些思考题目，甚至一些猜想，鼓励学生独立思考、勇于创新．学生可以自己选择实验题目，建立数学模型，在数学软件平台上编程、计算、分析结果等，学生也可以大胆地质疑某个数学原理或某个自然现象，通过自己或群体的讨论、分析，去论证结论的合理性．

（2）注重学生的“发现和探索”的原则．在设计数学实验内容的时候，应该设计一些能够引起学生兴趣的内容，每个实验围绕解决一个或几个问题来展开，教会学生使用若干方法去解决某个问题．比如“运动追逐问题”可以建立微分方程模型或通过计算机模拟的方法建模；“方程求解”有图形放大法、二分法、数值迭代法等．教学过程中采用提问式的方式，促进学生勤思考，深入钻研，变被动听讲为主动学习，大胆实践．在数学实验教学中，我们希望学生能对给出的某些自然现象、数学问题进行认真地观察和研究，探索某些值得思考的问题，甚至某些

疑惑，通过他们自己的分析思考最终使问题得以解决，从而更加深入地理解和掌握数学的概念和方法.

5　地方本科院校数学实验的课程体系

下面，根据地方本科院校特点，结合建构主义学习理论，从学生的认知结构出发，通过我院近几年的教学经验，从数学实验课的开课方式，教材建设，教学内容，教学模式，考核形式以及课程的评价等方面来详细阐述地方院校数学实验的课程体系.

5.1　用建构主义学习理论指导数学实验

以建构主义为核心的学习理论，发展了早期认知学习论中关于“建构”的思想，强调学生在学习过程中主动建构知识的意义，并力图在更接近、更符合实际情况的情境性学习活动中，以个人原有的经验、心理结构和信念的基础来建构新知识，赋予新知识以个人理解的意义.

建构主义对学习的基本解释是：学习是学习者主动地建构内部心理表征的过程，它不仅包括结构性的知识，而且包括大量的非结构性的经验背景. 维特罗克提出的学生学习的生成过程模式较好地说明了建构内部心理表征的过程.

（1）从建构主义角度分析，数学概念、知识在学生认知过程中从萌生、提出、发展到形成是服从于心理学的信息加工规律和原理的. 那么数学概念的教学让学生通过自我实践（包括运算、观察和实验）去体会这一过程，完成意义建构并从中掌握探求数学真知的操作程式，形成数学方法就不仅完全可能，也十分必要.

（2）当代认知心理学与建构主义学习理论.

当代认知心理学主要采用信息加工观点去研究人的认知过程，揭示人如何认识世界、学习和储存知识，如何加工和摄取知识去解决问题，力图从所建立的心理思维、智能模型来指导教学和学习进程. 认知理论主张在认知过程中学生中心论、结构中心论和过程中心论. 而以这种学说为依据的建构主义学习理论，是从认知主体心理过程角度出发，把学习者的内部认知结构和外部环境的变迁发展作为驱动力，经重组和顺应而形成新的认知体系的基本点而建立起来的学说. 该学说正适应目前信息计算机时代的发展趋势. 这种学习观和学习理论推动了从应试教育向素质教育的转轨的过程，并成为现代教育观的支柱理论和观点，理所当然地成为我们课题的研究依据和出发点.

5.2　开设数学实验课的方式

到目前为止，我国各类层次的高校对于开设数学实验课所采用的方式不尽相同，主要有以下几种：

方式 1：仅作为微积分教学改革的一部分，分别在高等数学、线性代数，概率论与数理统计课中增加数学实验课教学环节. 具体是可以另加数学实验学时，也可以不另加学时，仅作为课外内容或第二课堂的内容. 这种方式相对简单，教师易于适应，学生也无须太多的准备知

识. 这种方式强调具体的数学方法，实验课题的选取与数学课程相配合，旨在增强使用能力.

方式 2：独立于现行的高等数学、线性代数、概率论与数理统计，另外开设一门数学实验课. 课时在 40～60 学时之间，在上述三门课后单独开设. 它着眼于培养科学精神、动手能力与创新意识，增进对数学的兴趣，强调体验与探索，题材选取开放性的数学课题. 这样单独开设课程便于结合数学软件讲授计算方法的基本概念、基本理论和基本方法，使数学实验课带有更多的文化色彩，对准备知识的要求较低，能适应志趣不同的更多学生的需要. 数学科学各专业的学生尤其需要这种数学实验课，因为观察、归纳、发现规律是真实的数学工作中非常重要的成分，而在传统的数学课程中反映很少. 这种方式对学校的设备、师资和学生的计算机水平有较高要求，适合于条件和基础较好的一般院校和重点院校.

方式 3：按照课委会的要求，开设包括数学建模、实用数值方法、数学软件包使用和数据处理等内容的数学实验课. 课时在 60～90 之间，一半以上的时间用于学生上机，达到第三层次的要求. 这种方式对学校的设备、教师的水平和学生的素质都有很高的要求，适合于高水平的重点院校，一般院校还很难对全体学生开设这种方式的数学实验课，但可选择 25%～30%的数学基础较好的学生进行试点.

除上述三种主要方式外，还可以针对不同基础的学生做不同要求，分别开设多种形式的数学实验课. 但是，从地方本科院校的师资、学生知识结构出发，由于地方本科院校办学层次定位应以本科层次为重点，兼顾专科层次，在人才培养规格和模式上，以应用型（实用型）、复合型、创业型为主，少量培养学术型、研究型，因此我们建议地方本科院校数学实验的开设以方式 2 为基础.

5.3 数学实验课的现状及教材的选取

目前，我国比较成熟的关于数学实验课的做法大体可以分为以下三类：第一类是以北京航空航天大学为代表的基础实验，通过对 Mathematica 软件的详尽介绍，用 Mathematica 学习高等数学并解决一些实际的问题；第二类是以清华大学以代表的数学模型实验，以数学内容为主线，结合案例教学，来应用数学；第三类为以中国科学技术大学为代表的研究性实验，通过以案例为主，解决和探索这些问题用什么学什么，并介绍一些现代数学的基本方法和原理. 他们的总的原则就是学习数学.

我院现选用的教材是中国科学技术大学李尚志等编写的由高等教育出版社出版的《数学实验》第二版，上课内容根据教学需要以及近几年教师在上课中总结的一些经验所编写的讲义做了一些调整，再参照萧树铁先生所主编的《数学实验》增加了一些实验，但主要以李尚志的书为蓝本.

5.4 “数学实验”课程的教学内容

根据地方本科院校的特点，从知识的认知原理出发，用建构主义的观点，结合我院在近几年的教学实践，我们认为数学实验可分为四个层次部分：第一部分就是简单地对两种数学软件 Mathematica 和 Matlab 的学习、掌握和应用，从而利用两种软件进行数学实验；第二部分是基础部分，围绕高等数学的基本内容，让学生充分利用计算机及软件的数值和图形功能展示基本概念和理论，去体验如何发现、总结和应用数学规律；第三部分是高级部分，以高等数学为中心向边缘科学发散；第四个部分是应用实验部分.

我院从 2000 年开始开设数学实验课程. 根据我院这几年的教学实验，结合一般本科学生认知特点，我们认为，这四个部分的总学时应在 45～60 学时，数学专业四个层次实验时间分配的较为合理的比例为 20%，30%，30%，20%. 非数学的其他本科专业可以按 25%，35%，25%，15%来分配. 其详细内容可根据学生的特点自由取舍和增补，在表 1 中给出了根据以上介绍所设置的在教学中选择的实验内容和素材，仅供参考. 实际授课时基础部分实验学时必须保证，如果学生计算机水平较差，可适当增加 2 个学时的软件学习实验. 探索性实验选取其中的 5～6 个题目，在 12～16 学时内完成. 综合性实验一般选取 1～2 个题目，在 4～6 学时内完成.

层次	参考内容	备注
基础实验	Mathematica 入门，Matlab 简单入门	见书附录
基础实验部分	微积分基础及计算，最佳分数近似值 方程求解、函数曲线、积分、矩阵求逆、圆周率、素数	
高级实验部分	数理统计、图论与组合、微分方程、运筹与优化	
应用实验部分	具体应用，可结合数学建模，也可结合某一个全国数学建模竞赛题讲解	

（1）实验基础：对于地方院校的数学实验这门课程来说，实验基础部分主要是使学生掌握必要的实验软件、熟悉实验的过程. 着重讲解 Mathematica、Matlab 等通用性数学软件的软件特点、命令及其功能，简单介绍数学学科中的符号运算、数值计算、图形绘制等如何利用数学软件来实现. 提高学生使用数学软件处理数学问题的能力，为后续实验打好基础.

（2）基础实验部分：设置一些以“高等数学”及“线性代数”为背景的习题，如安排方程求解、函数曲线、积分、矩阵求逆、圆周率、素数等实验，让学生在计算机上完成. 通过练习，让学生学会使用这些软件工具来进行各种数值、符号运算和图形演示的同时，熟悉实验的准备、数学模型设计、计算机实现、写出实验报告的整个实验过程，保证后续实验的效果.

（3）高级实验部分：是以高等数学为中心向边缘科学发展，可涉及微分几何、数值方法、数理统计、图论与组合、微分方程、运筹与优化等，也可涉及现代新兴的学科和方向，如分形、混沌等. 这类实验的目的是根据问题的性质，选择和设计数学模型，灵活运用已具备的数学基础，精心设计实验来验证数学结论，揭示自然现象，发现规律. 一般情况下，高级实验部分的数学模型比较直接，有充分的限定条件，软件提供了成熟的解决算法. 教师讲课时，主要是提出问题，适当介绍问题的背景，介绍主要的实验原理和方法. 然后就让学生自己动手去做，去观察，通过观察得出结论. 这部分对于地方院校来说，可以适当降低一些难度，老师可以给出一些提示.

（4）应用实验部分：以社会实践为背景，尝试解决某类应用背景的实际问题，使学生体验从具体问题分析、数学模型的建立和调整、算法设计和上机计算、结论分析、形成论文报告的全过程. 应用实验部分问题原型、条件、约束等一般不明显也不直接，需要学生重塑问题，简化和限定模型，并根据实验数据进行模型调整，算法实现需借用软件的多项功能或综合调用多个软件. 针对地方院校的自身特点，结合我们这几年的实际经验，我们认为这部分可以讲解一些近几年的全国大学生数学建模竞赛的题目，主要目的是为一年一度的全国数学建模竞赛做准

备、打基础. 因为地方本科院校对建模竞赛的专项资金不可能投入得太多，但是现在的大学生，参加一年一度的建模竞赛已是大势所趋，可以用这种方式一方面做准备，另一方面又可以节约投入成本.

我校数学实验课程根据以上探索的教学方法试行了几届，成绩斐然. 在 2003 年全国大学生数学建模竞赛中获得了两个赛区一等奖、三个二等奖的好成绩. 2004 年更是再创新高，获得了一个全国一等奖、一个全国二等奖. 在 2004 年我校一共组织了 15 个队参赛，最后有 9 个队获奖，这在地方本科院校数学建模竞赛中遥遥领先. 这说明，我们关于数学实验课程的探索实验还是有很强的说服力的.

别外，由于我们讨论的是地方本科院校数学实验这门课的教学模式，因此教师在授课时，应该根据学生的识知情况，提供相应的问题背景资料，与学生共同参与问题的讨论. 审核和指导学生的方案，应提供必要的指导，但不宜过多介入学生的实验过程，以锻炼学生的独立能力，培养学生的创新精神和创新能力. 在教学过程中，选择的实验应因人而异. 不同专业的学生，数学基础不同，专注的数学应用方向不同，如经济类专业的学生专注于概率统计问题、运筹问题，农医类专业的学生专注于应用统计、微分方程类问题，而工科类学生则关注于数值方法类问题……

因此，教师在选择教学内容方面，应处理好如下几个关系：

（1）实验素材与学生的专业兴趣的关系. 实验素材是实验针对的实际问题. 应利用实验素材的专业背景，激发学生的兴趣和热情，进而促使学生深入实际了解背景，寻找解决问题的数学方法，达到从实验中去学习、探索和发现数学规律的目的.

（2）实验内容与后续课程的关系. 在数学实验课的内容中往往会牵涉到一些后续课程，如数值计算、优化方法、数理统计和数学建模等. 数学实验并不是要代替（也代替不了）这些课程，它只要求学生采用“拿来主义”，会用其中的处理方法，而不涉及这些课程的理论体系和结构.

（3）问题难度与学生能力的关系，要结合地方院校本身的实际. 一个太难或涉及过多其他知识的问题会让学生无从思考，教师无从点拨. 教师只好满堂讲解，学生被动接受，最后养成学生的依赖心理，达不到培养学生应用数学知识解决实际问题能力的目的. 而过于简单的问题也不利于引发学生的思考，反而会逐步失去对这门课程的兴趣.

5.5 “数学实验”课程的教学模式

在教学安排上，主要是让学生自己通过动手去体验，而不在于教完他们多少内容. 不追求内容的系统性，完整性，而应当激发学生自己动手和探索的兴趣. 各个实验基本上是独立的. 前后实验没有顺序上的冲突，实验安排的顺序基本上是由易到难，基础内容在前，较高级的扩散性的内容在后. 此外，在安排上，时间不宜太紧，因为实验的设计和准备需要学生在课下进行，要留有学生查阅资料和实验准备的时间，以便提高实验学时内的学习效率. 除基础实验外，一般每周 3～4 学时，每 1～2 周完成一个实验为宜.

另外，由于数学实验要涉及高等数学等相关学科的知识，因此我们建议：在开设这门课的时候最好是在大二下期或大三上期. 在数学专业学了高代、数分之后，而非数学的也已完成高等数学课程之后开设显得较为合理.

用知识的认知原理，结合建构主义的相关知识，通过对地方本科院校特色的考察，我们认

为对一般地方本科院校数学实验课教学模式的基本思路应是：从问题情境（实际问题或数学问题）出发，学生在教师的引导下，先独立设计研究步骤（即自主学习），然后在计算机上进行探索性实验，再通过分组讨论与交流，提出猜想，进行证明或验证，发现规律．根据这一思想，教学模式一般主要包括以下五个环节．

（1）创设情境．创设情境是数学实验教学过程的前提和条件，也是建构主义情境教学模式的组成之一．其目的是为学生创设思维场景，激发学生的学习兴趣．英国实用主义教育家、哲学家斯宾塞在《什么是最有价值的知识》一文中明确提出："科学起源于人生的需要，无论个人或全种族，其所取的途径必由具体以达抽象．……所以，每门科学必须以纯粹经验为之先导；等到观察积累了丰富的材料后，推理才能开始．"

问题情境的创设要精心设计，要有助于唤起学生的积极思维．数学教学中，创设合适的问题情境，应注意以下几个方面：① 合理运用文字与动画组合．问题情境呈现清晰、准确，这是最基本的要求．② 具有可操作性．便于学生观察、思考，从问题情境中发现规律，提出猜想，进行探索、研究．③ 有一定的探索性．问题的难度要适中，能产生悬念，有利于激发学生去思考．④ 简明扼要．创设情境不宜过多，用时也不要太长，以免冲淡主题，甚至画蛇添足．

（2）活动与实验（也即自主学习）．这是这种教学模式的主体部分和核心环节．教师根据具体情况组织适当的活动和实验．在教师给学生提供的有关线索指引下，学生独立探索自主解决问题．这里教师的引导作用仍然是必要的，教师给学生提出实验要求，学生按照教师的要求，在计算机上完成相应的实验，搜集、整理研究问题的相关数据，进行分析、研究，对实验的结果作出清楚的描述．这一环节对创设情境和提出猜想两大环节起承上启下的作用．

著名的数学家、数学教育家 G·波利亚总结出了数学学习过程的三条原则，其中第一条是"主动学习"，认为"学习过程是积极的……自己头脑不活动起来，是很难学到什么东西的"．学习通过"做数学"来学习数学，在教师的指导下，通过观察、实验去获得感性认识，有利于学生以一个研究者的姿态在"实验空间"中观察现象，发现问题，解决问题，进而培养学生的想象力、解决实际问题的能力及严谨的科学态度和数学情感．

（3）讨论与交流（也即协作学习）．这是开展数学实验必不可少的环节，也是建构主义情境教学模式必不可少的环节之一，还是培养合作精神、进行数学交流的重要环节．让学生积极主动地参与到数学实验活动中去，对知识的掌握，思维能力的发展，学业成绩的提高以及学习兴趣、态度、意志品质都具有积极的意义．在学生积极参与小组或全班的数学交流和讨论的过程中，通过发言、提问和总结等多种机会培养学生数学思维的条理性，鼓励学生把自己的数学思维活动进行整理，明确表达出来．这是培养学生逻辑思维能力和语言表达能力的一个重要途径．

数学交流是现代数学教学中的一个新课题，把实验与交流结合起来凸现了数学知识的形成过程．提倡学生使用计算机可以为学生学习数学提供便捷的实验环节，并且学生使用计算机做数学实验的过程也是一条很好的数学交流途径．

（4）归纳与猜想．归纳与猜想这一环节和活动与实验、讨论与交流密不可分，常常相互交融在一起，有时甚至是先提出猜想，再通过实验验证．提出猜想是数学实验过程中的重要环节，是实验的高潮阶段；根据实验观察到的现象进行数据分析，寻找规律，通过合情推理、直觉猜想，得到结论是数学实验的教学目标实现程度的体现，是实验能否成功的关键环节．

G·波利亚曾经这样高度评价过猜想的作用：仅仅把数学视为一门论证科学的看法是偏颇的，论证推理（即证明）只是数学家的创造性工作成果，而要得到这个成果则必须通过猜想．猜想是一种灵感，要产生灵感，除了必须具有一定的数学修养外，还应该对面临的问题有比较深刻的理解．

（5）验证与数学化以及效果评价．提出猜想得出结论，并不代表实验结束，还需要验证，通常有实验法、演绎法和反例法．

提出猜想是科学发现的一个重要步骤，目前开展研究性学习，培养学生的创新意识，开发学生的创新潜能，需要猜想．但数学不能仅靠猜想来行事，验证猜想是科学精神、思想以及方法不可或缺的关键程序，是对数学实验成功与否的“鉴定”．教师有必要引导学生证明猜想或举反例否定猜想，让学生明白，数学中只有经过理论证明而得出的结论才是可信的．

5.6 “数学实验”的考核形式

在考核形式上，数学实验不适合笔试进行，主要有实验报告和实验论文两种方式．实验报告记录所做的实验内容，记录实验时的观察和猜测．实验报告的主体可以分为以下四个部分．

（1）实验的策略或设计．包括介绍所提出问题及提出问题次序的动机，数学模型的建立，实验数据的准备，实验各阶段的目标和实现手段．

（2）实验过程．在实验中，应随时记录所做的实验内容，记录实验时的观察和猜测．

（3）实验结果．通过仔细组织所得数据，有效地利用表格、图形和图片表示实验结果．

（4）数据结果分析．认真分析结果的数学意义、物理意义，并提出猜想、论证猜想．实验报告要通俗易懂，要努力做到行文清晰流畅．实验论文的撰写类似研究论文，要求包括题目、摘要、正文、参考文献等部分．正文部分要写出实验内容的背景、实验的目标、实验的方法与设计、实验的结果，实验的数据分析，实验结果所反映的实际意义等内容．主要培养学生分析问题、解决问题、表达问题的能力．实验基础、基础实验、高级实验、应用实验均可用实验报告的形式考核，但实验报告的撰写略有不同．实验基础的实验报告注重软件的功能，参数的含义，计算结果的表格化、图形化．基础实验、高级实验的实验报告要求注重实验设计、实验步骤、实验的结果、数据分析，突出问题的数学意义和实际意义．应用实验建议以实验论文的形式为宜．

5.7 “数学实验”课程的评价

“数学实验”课程以学生提交的实验报告和实验论文为主，兼以学生的实验态度和表现进行综合评价．学生的每个实验都由任课教师依据“真实性、知识性、实践性、创新性”这 4 个方面综合给出成绩．课程的最终成绩根据每个实验的成绩按加权平均的方法得出．实践表明这种方法能比较客观地反映出学生学习的实际状况和效果．真实性是数学实验的最基本的评分标准．实验报告应在学生自己动手设计、上机操作、观察、分析的基础上给出，要实事求是，即使计算的结果与理论结果不一致，也不能在实验报告中说假话．应当分析其原因，找出改进的办法，重新实验．知识性是实验中运用数学知识的程度，运用的正确程度，结论的可靠程度．实践性是学生在实验中在运用数学软件的运用水平，驾驭数据处理、分析角度和方法、表达等方面的能力，反映出学生处理问题的实践能力．创新是对实验报告的更高的要求．对于有创造性的报告，要给以高分作为鼓励．

6 数学实验与一些相近学科的区别

6.1 与传统数学的区别

数学实验课与传统的数学课程的一个主要区别是，传统的课程注重知识的传授和逻辑推理能力的培养；而数学实验课则侧重于培养学生用形和量的观念去观察和把握现象的能力，培养学生综合运用数学知识分析和解决问题的意识，即数学素质．另一个区别是过去数学课程的运算能力的培养，主要指的是寻求解析解的能力，包括许多的变换和技巧．而这些训练势必使课程内容臃肿不堪，增加学生负担，数学实验课则更侧重于创新意识和科学计算能力的培养，也就是运用现代的技术和软件包来取代那些繁杂的推算和复杂的运算技巧．由于软件包技术的高速发展，不仅能完成复杂的数值计算，也能进行符号演算以及机器证明等工作．因此，数学实验课是培养学生创新能力和加强实践性训练的一个重要环节．

数学模式上改革传统数学的教学形式是以教师和课堂教学为中心；而数学实验更多地强调以学生为中心，以课外学习为中心．数学实验既然是实验，就要求学生多动手、多上机，少讲多练．首先在教师的指导下，熟悉实验内容，然后在课后利用相关数学软件，借助计算机编程进行计算，通过观察数据，自己总结规律，并用描述的语言猜想并分析所研究的现象．

与计算方法、统计方法、优化方法等课程相比，"数学实验"课尽管也要介绍和利用到数值计算方法、统计方法、优化方法，但不应取代这些课程．否则学生会失去兴趣．"数学实验"课只能通过实例来介绍这些课程的基本思想和方法，不必花大量的时间与精力去讲解系统的内容，而有关专门的、比较精细的内容与方法的讲解，则留给这些课程去完成．

6.2 数学实验与数学建模课的区别

数学实验与数学建模相比，两者都要用到计算机，但前者是在计算机的帮助下学习数学知识，后者则是让学生利用数学知识和计算机手段来解决实际问题．一个是学，一个是用，两者的目标不同．它们的共同点是两者都要从问题出发，而不从概念出发．但数学建模强调问题的实用性而不强调普适意义，解决问题本身就是目的；而"数学实验"课可以从理论问题出发，也可以从实际问题出发，但这个理论问题或实际问题最好是比较经典的，具有普遍意义．让学生以解决问题为线索总结规律，学到知识．

6.3 数学实验与高等数学的区别

与高等数学相比，两者都是为了学知识，但学习方法很不一样．高等数学课主要是由教师传授系统的理论知识，而"数学实验"课则希望通过学生自己动手和观察去体会这些知识是怎样得来的．

6.4 数学实验与计算机相关课程的区别

与计算机课程相比，对于非计算机专业的学生来说，计算机知识（包括计算机语言以及软件的使用等）只是一种工具，学了就要用．但现在大学里的计算机课和其他课程（特别是数学课程）脱节，导致很多学生学习计算机语言也只是为了得学分，考过了就忘了，到高年级真需

要用的时候还得重新学习．开设“数学实验”课有利于改变这种状况．“数学实验”课既迫使学生学好计算机知识来解决数学问题，同时又为计算机课程提供了大量真刀真枪的练习机会．两者的结合势必真正提高学生对于计算机知识的掌握水平和应用的能力，使计算机课程可以用更少的课时取得更好的效果．

7 在教学过程中应进一步研究的问题

在教学过程中应进一步研究的问题：

（1）如果不能正确处理数学实验与其他数学课程的关系，而独立开设《数学实验》课程，会使《数学实验》课教学与其他数学课教学脱节，不能充分发挥《数学实验》课的优势．因为《数学实验》课使用的数学软件包具有强大的科学计算功能、图形可视化处理功能、系统动态仿真功能和程序语言设计功能．

（2）进一步明确课程的目的和定位，并贯彻到课程内容中去．这门课不是数值计算、优化、统计、建模几门课的浓缩，也不是建模竞赛前的培训讲座．不能简单地说它以数学为主，还是软件为主，其主要目的不在于传授某些知识，而要求在数学知识、建模能力和软件实现的结合上下功夫，培养学生动手解决实际问题的兴趣和能力．

（3）课程内容需要进一步精炼，要改进、增加应用例题，要着手进行数学实验课程素材库和电子课件的建设．

（4）要加强、改善学生实验内容的安排和指导．学生上机能力相差很大，实验应有较大灵活性，使绝大多数学生在主要方面都有收获；软件平台应结合学校具体情况，尽量简单和通用；进一步探讨减少学生完成和教师批改实验报告工作量的方法；呼吁学校加强实验室软、硬件环境和网络教学系统的建设．

（5）数学实验课也有一定的局限性：利用计算机的计算功能可以很快求出结果，一般不能演示中间的运算步骤，可能会使人过分依赖机器，认为没有必要再学习数学理论和做一定的数学习题．事实上，由于数学学习是一个重逻辑思维培养的学科，必须强调进行数学实验只是一个辅助手段，它不应也不可能代替数学学习的全部．

8 结 论

数学实验课是我国高等学校中新开设的一门课程，目前仍处于探索和试点阶段．我们以地方本科院校的办学特点为基本出发点，用建构主义观点，以学生为主，教师引导的原则，注重学生的发现和探索，初步确立了数学实验的教学目的和意义，教学的指导思想，并对本课程的现状进行了分析，确立了地方院校数学实验课程的教学内容、教学模式和考核评价体系等．

参考文献

[1] 刘琼荪，任善强，龚劬，等．开展数学实验课程教学，促进大学数学教学改革[J]．工科数学，2002（1）：55～58

[2] 许立炜．高校数学教育改革的初步尝试——数学实验课的开设[J]．南京邮电学院学报（社会科学版），2002，（2）：19～22

[3] 姜启源．数学实验与数学建模[J]．数学的实践与认识，2001（5）：614～617

[4] 任善强，刘琼荪．"数学实验"课程的教学研究与实践．高等数学研究[J]．2004（1）：8～10

[5] 何克抗．建构主义的教学模式、教学方法与教学设计[J]．北京师范大学学报（社会科学版）．1997（5）：74～81

[6] 王育宽，赵立强，周铁军等．"数学实验"课程体系的构建[J]．河北职业技术师范学院学报，2003（2）：76～80

[7] 乐经良，向隆万，李世栋．数学实验[M]．北京：高等教育出版社，2003

[8] 李尚志，陈发来，张韵华，等．数学实验（第二版）[M]．北京：高等教育出版社，2004

[9] 韩西安，黄希利．数学实验[M]．北京：国防工业出版社，2003

[10] 任玉杰．高校数学教学模式改革与数学实验．大学数学[J]．2004（1）：19～23

[11] 罗薇．对建构主义教学观的几点认识．荆州师范学院学报（自然科学版）[J]．2002（5）：111～115

[12] 李尚志，陈发来．"数学实验"课程建设的认识与实践．数学的实践与认识[J]．2001（11）：764～768

[13] 刘琼荪，龚劬，何中市，等．数学实验[M]．北京：高等教育出版社，2004

文科数学教材质量指标体系的构建与分析

甘祖英

【摘　要】随着高校文科数学开设专业、人数的不断增加，文科数学课程改革日益受到各高校的重视．选择一本好的文科数学教材是提高文科数学教学质量的关键．本文针对大学文科数学的课程特点，参照目前教材质量评价的指标体系，建立了一套适合文科数学教材评价的指标体系，并利用层次分析法构建了大学文科数学教材质量评价模型，将定性分析与定量计算相结合，使理论分析更具体、形象，更具有说服力．最后，将本文构建的大学文科数学教材质量评价模型运用到我校大学文科数学教材的评价中，评价结果与专家意见一致．

【关键词】文科数学　教材质量评价　层次分析法　指标体系

1　引　言

随着国家教委《面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划》的实施，人才培养模式、专业划分与设置、课程内容、教学手段等改革正在向更广、更深的层次发展．课程体系和教学内容的改革最终必然要落实到教材建设上．为进一步加强高校教材建设、教材研究和教材管理工作，使高校的教材工作走上科学化、规范化、制度化的轨道，以适应我国高等教育事业改革与发展的需要，更好地为培养人才服务，必须建立各高等学校教材工作评估制度．教材质量评价作为一种有效的评价教材优劣的手段已日益受到人们的关注．现在有些高校都相继进行了教材质量的评价，但所选用的指标都是符合所有教材的，并未针对个别教材而制定，这就说明我国在教材质量评价上的工作还应进一步完善，做到更具体，更详细．并且大学文科数学也越来越受到各高校文科专业的重视．针对此情况，本文根据此专业的具体情况，参照一些教材质量评价指标体系，并用 T. L. Saaty 等人提出的层次分析法对其进行定性和定量相结合的、系统化的、层次化的分析，来判断一本教材的优劣．根据所判断的结果，可以为教师或学生选用教材提供一个参考，从而有助于他们的教与学．

1.1　课题的提出及研究意义

1.1.1　课题的提出

近年来，在文科开设高等数学课程的必要性和可行性已成为教育界的共识．通过数学基本知识和基本技能的学习，有利于提高文科大学生的量化能力、逻辑思维和逻辑推理能力，有利于培养学生严谨、求实的态度，培养出知识面宽、能力强、素质高的高规格跨世纪人才 —— 在

竞争中求得地位和发展，成为新时期以经济建设为中心的多面手，高素质的国家栋梁.

现我校已在探讨文科数学教学建设的工作，选择一本适合文科学生学习和老师教学的书籍是很重要的. 对于大多数的文科生来说，他们认为学习数学没有什么必要，只需要能进行简单的计算就可以了，而且还认为学数学很枯燥乏味，也没多大的用处. 其实不然，学数学对于我们来说不仅要学到知识，更重要的是我们要了解数学的思想和方法. 这对于我们以后在工作或是生活中都有不可替代的作用. 让文科生爱数学、喜欢数学是我们作为数学教师应该考虑的问题. 那究竟该从什么方面着手呢，我认为还是在于教材的选择方面. 教材质量是学生学习数学的兴趣和教师教学的关键. 为此，对文科教材的分析评价也就显得很重要了.

1.1.2 研究意义

教学评估是学校教学工作中的一项重要工作，是培养人才、实现教育目的的重要手段和基本途径. 教材质量评估就是根据教学目的和原则，利用可行的评估手段对教材选用及其预期的教学效果给予价值上的判断，实现教材质量评估的反馈、咨询决策作用. 目前，在文科专业中已开设数学课程，开设此课程可以使文科生更加适应社会的发展，能够解决实际问题，增强认识，提高文科生的素质. 然而在文科教材建设方面：文科数学教材内容陈旧，理工例子较多，并且内容偏难，对文科专业的学生要求偏高；在讲授内容方面：有些教师忽视专业对数学的特殊要求，简单的“一刀切”；而学生学习方面：学生主观上对学习数学课程的必要性认识不足，产生消极影响，客观上文科生数学功底差，对数学缺乏感悟. 针对这些问题，我认为选择一本好教材就显得尤其重要. 因此建立一个教材质量指标评价的模型很有必要，这样就可以为教师选择一本教材提供一个参考.

1.2 国内外研究现状

我国开设大学文科数学最早始于 20 世纪 70 年代末，由时任北大校长丁石孙教授提倡并决定在北大部分文科专业开设数学课程. 随着社会的发展，人类认识的不断提高，开设文科数学课程的学校和专业逐年增多，呈上升趋势，尤其是 1995 年以后，发展更快更普遍.

1995 年 8 月在山西太原，我国高校文科数学召开了“第一次全国文科数学教育研讨会”，这是我国首次全国性的会议. 会上探讨了开设文科数学的重要性，并同时宣布了全国文科数学教育研究会的成立. 随着文科数学课程建设的不断发展，其中的弊端也显露了出来，如教材的采用、教学内容的选择都带有盲目性，课时少、课程设置不配套、任课教师不稳定等. 其中最重要的就在于教材建设方面，全国出版的文科数学教材种类繁多，版本不一，而对其教材质量有专业评价的几乎没有，大部分只是对某本教材的具体评价，带有片面性.

对教材的分析，国际上已有成功经验，如英国的苏萨克斯方案，美国休斯敦大学察贝塔等人提出的理科教材分析程序以及噶兰现代教材研究等方案. 我国教材工作评估开始于 20 世纪八九十年代. 在 1996 年，河南省教材工作研究会就组织实施了一次全省 40 多所普通高校的教材工作评估. 近一段时间来，我校也组织实施了一次教材评估工作. 高等教育教材工作评估研究和实践在我国的历史较短，而文科数学教材工作评估就显得更加短暂了. 对文科数学的教材评价都是伴随着高校教材工作建设进行的，因此，我国对大学文科数学教材的评价研究较为薄弱，国内外尚无一套严格的具体的评价指标体系. 从发展趋势看，将来人们会逐渐意识到它的重要性，评价指标体系也会越来越完善，从而进一步促进我国高校文科数学教学工作的发展，

推动高校文科数学的改革.

1.3 论文研究方法和基本思路

在论文中，作者在对教材分析评价的功能和大学文科数学教学工作开展深入研究的基础上，提出了教材质量评价指标体系，可用于大学文科数学教材的评价，这样便能够提供更加科学的、准确的决策信息. 论文的章节结构如下：

论文第一章“绪论”主要介绍了课题的提出背景、国内外研究现状和发展趋势以及课题研究的主要内容和意义；第二章“文科数学教材的评价和指标体系”介绍了文科数学教材评价的目的、评估指标体系内涵和教材质量指标评价的原则；第三章“文科数学教材质量指标体系的构建与分析”介绍了文科数学教材质量指标的确定、教材质量评价指标体系的建立以及用层次分析法去计算构建出的教材质量评价指标体系并就评价结果分析原因，还就目前大学文科数学教材存在的问题提出了一些建议；第四章“总结”总结了论文的主要工作，还对课题的进一步研究做了探讨.

2 文科数学教材的评价和指标体系

2.1 文科数学教材评价的目的

近年来，有90%以上的大学已经开设了大学文科数学这一课程，毋庸置疑，这是高校深化教育改革，顺应知识经济时代对高校人才提出的更高要求所采取的积极步骤. 大学开设文科数学课程也有它的必要性：一是为了社会发展的需要；二是解决实际问题的需要；三是增强认识的需要；四是提高素质的需要. 好的教材是教学的基础. 教材质量评估推动了高等学校教材工作水平的提高，加快了高等学校教材工作改革的进程，给高等学校教材工作带来新的面貌. 同时也促进了高等学校教学质量的提高，对教学秩序也起到了稳定的作用. 教材建设工作是高等学校一项基础工作，是教学工作中一个重要的组成部分，也是深化教学改革，提高教学质量的重要保证. 教材工作评估过程也是完善和改进教材工作的过程.

教材评估有两个重要作用：其一是“诊断性”，通过评估，判断、摸清本校教材工作现状，及时发现问题和缺点，提出改进的目标和方向；其二是“评优性”，通过评估、评比，比较各教材的优劣性，就可从中选择出最佳教材. 教材是教师教学、学生使用的工具. 对大学文科数学教材进行分析评估，就是要分析大学文科数学教材在帮助学生学习，促进学生智力和思想品德成长方面的有效性、可靠性和可行性，评估教材的功能效益水平，这是对大学文科数学教材评价的目的之一.

“以评促建”也是教材工作评估的目的. 通过评估. 各院校之间对教材工作加深了了解，为进一步改进工作明确了方向. 建立教材评价指标体系，充分利用教学评估的导向和监督作用，客观、公正地对教材评估，是提高教学质量的重要手段.

2.2 评估指标体系内涵

2.2.1 评估目标、指标、权重和评估标准

评估目标(evaluation goal):评估目标是指根据评估的目的,对评估对象的价值进行判断.一般来说,评估目标总是具有某种程度的原则性、抽象性和笼统性,很难直接进行评估,这就需要将评估目标具体化.

指标(index):在《现代汉语词典》中的解释是"计划中规定达到的目标",在教材质量评估中,指标是将具有原则性、概括性和抽象性特征的目标,逐级分解,使之最终成为具体的、行为化和可测的分目标.

权重(weight):权重是表示指标在指标体系集合中的重要程度.

评估标准(evaluation criterion):指标是对评价对象的某一部分(或要素)的价值判断,因此每一个指标有一个与之对应的价值判断标准,也就是对评价要素进行价值判断的准则或尺度,这就是指标的评价标准.

2.2.2 评估指标体系内涵

评估指标体系(index system of evaluation):由反映评价目标整体的评价指标系统,以及与之对应的指标权重系统和指标评价标准系统所构成的整体.

指标体系是实现目标的重要手段,是进行教育评估的前提和依据,它同时提供了进行价值判断的统一尺度,对照指标体系的要求,对教材的优势和不足之处就会有一个清醒的认识和客观的把握.可见评估指标体系在文科数学教材质量评价中占有重要地位,充分认识指标体系是否科学、客观、可行,是文科数学教材质量评价成败的关键之一.

2.3 教材质量指标评价的原则

指标体系是目标的具体化,它必须充分地反映目标,同时还要考虑评价的公正性、有效性和评价结果的社会可接受性.建立科学的、公正的评价指标体系,是开展评价工作之前首要解决的问题.因此,我们建立教材质量评价体系时要遵循一定的原则.

2.3.1 目标导向性原则

高等教育教材质量评价指标体系是教育目标在高等教育教材方面的具体化,是进行高等教育教材评价的直接依据.它直接制约着高等教育教材评价的进行和高等教育目标在高等教育教材建设与改革方面的实现,具有很强的导向性.我们的高等教育是社会主义性质的教育,教育目标是培养高级专门人才.制订评价指标体系要有利于引导广大高等教育工作者参与面向21世纪教学内容和课程体系改革,编写、使用真正符合教学实际的好教材.

2.3.2 科学性原则

教材质量评价指标体系必须遵循科学的教育理论和统计学的资料分类要求.指标设计得是否科学,决定了评价教材质量能否科学、客观、准确地进行.它是设计指标体系中的一个重要原则.

2.3.3 全面性原则

制订评价指标体系,应满足指标的完备性,即要求制订的大学文科数学教材质量评价指标体系不能遗漏关于教材的任何重要方面的情况,应全面地、系统地、本质地反映、再现和涵盖大学文科数学教材的各方面情况.指标体系的完整性,有利于评价者从多角度、多侧面地观察分析高等教育教材,这样评价结果就会更客观、公正,就不会造成评价工作的失误.

2.3.4 可接受性原则

制订的评价指标体系应能为被评价者所接受，成为被评对象的激励因素．要做到这一点，指标体系至少应满足如下要求：① 指标体系的确立要切合实际．评价人员在制订指标体系时，要广泛吸收被评对象的合理意见，从而减少评价过程中不应有的阻力，使评价指标体系更切合实际，更有群众基础．② 评价指标体系中的指标要难易适度．一般来说，评价对象完成指标时，应感到有一定难度，但通过主观努力又能达到，太难太易都是不恰当的．③ 评价指标要能公平地评价被评对象，使所有被评对象都能在同一基础上公平地接受评价．

2.3.5 可操作性原则

在制定的评价指标体系中，要求制定的指标体系既能对教材的编写、使用情况进行度量，又便于评价过程中操作实施．要满足这个要求，制订指标体系要注意以下几点：① 指标体系必须尽量做到条目简明．建立指标体系时要对教材进行认真分析研究，找出评价的主要因素，并给以清楚、明确的表述．② 末级指标应可测量．末级指标的内容应语言概括，清楚表达出指标中的内涵．③ 指标体系中的各项指标要有权重，权重的比例要科学合理．

只有满足了上述几个原则，大学文科数学教材评价才会科学、公正、公平地进行，评价的指标才可以被采纳，评价结果才具有社会可接受性．

3 文科数学教材质量指标体系的构建与分析

3.1 教材质量指标的确定

评价标准是一个复杂的问题，它应该体现评价主体对教材的价值需求，在评价活动中应弄清三个评价的要素，一是实施评价的主体，二是作为评价对象的评价客体，三是评价活动中使用的评价工具 —— 评价指标体系．而一个完整的评价指标体系应由指标、标准、量表和指标权重这四个元素构成．在本学年，学校对我院的所有教材进行了一次总体的评价，评价指标如附表 3 所示．我校的教材质量评价的结论分为优秀、良好、一般和不合格四种．此表是我校选用教材质量指标评价表，但对于各专业各学科的教材编写就会有一定差异，所以我们需要对此表做一些改进．我们针对文科数学这一课程的特色，并参照有关专家提出的评价教材的指标，还调查了解广大师生意见，建立了符合大学文科数学教材质量评价的指标体系（见附表 2）．

3.2 教材质量评价指标体系的建立

通过老师、同学问卷调查和参阅有关资料，筛选出教材质量指标评价的评价指标，并基于我校教材质量评价表，我们把其中的一些指标作了一定的调整，浓缩成了四个，即教学水平、思想水平、科学水平、编写制作水平．对于文科数学教材，它的新颖性会对读者起到一定的吸引作用，因此我将新颖性考虑在了思想水平这一指标中，作为其二级指标．教材编写的独特性也是有别于同类教材的一个特色，因此也将其考虑在了思想水平这一指标中．另外将文图水平、印刷质量、风格特色概括成一个指标，即编写制作水平，并将其具体化．还在其二级指标中，添加了语言文字这一指标．对于文科生来说，他们所学的数学都比较基础，因此教材的可读性

以及它是否便于自学都显得很重要．这样全方位的考虑评判指标就能更准确地评价大学文科数学教材了．

应用层次分析法在构建的大学文科数学教材质量指标体系层次结构中，包括三层：

目标层 A：总体质量；

准则层 B：评价一级指标：

B_1 教学水平，B_2 思想水平，B_3 科学水平，B_4 编写制作水平；

指标层 C：大学文科数学教材质量评价的二级指标：

C_1 教学适应性，C_2 认识规律性，C_3 结构完整性，C_4 前沿性，

C_5 新颖性，C_6 思想性，C_7 独特性，C_8 系统性，C_9 逻辑性，

C_{10} 理论性，C_{11} 语言文字，C_{12} 图表，C_{13} 印刷质量，C_{14} 风格特色．

3.3 综合评价模型

3.3.1 多层次模型

依据层次分析法，我们将评价总目标 A——总体质量，分解成四个层次，如图 1 所示，$A=\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$，其中教学水平 $B_1=\{C_1, C_2, C_3\}$，思想水平 $B_2=\{C_4, C_5, C_6, C_7\}$，科学水平 $B_3=\{C_8, C_9, C_{10}\}$，编写制作水平 $B_4=\{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}\}$，$C_i$（$i=1, 2, \cdots, 14$）为评价指标．

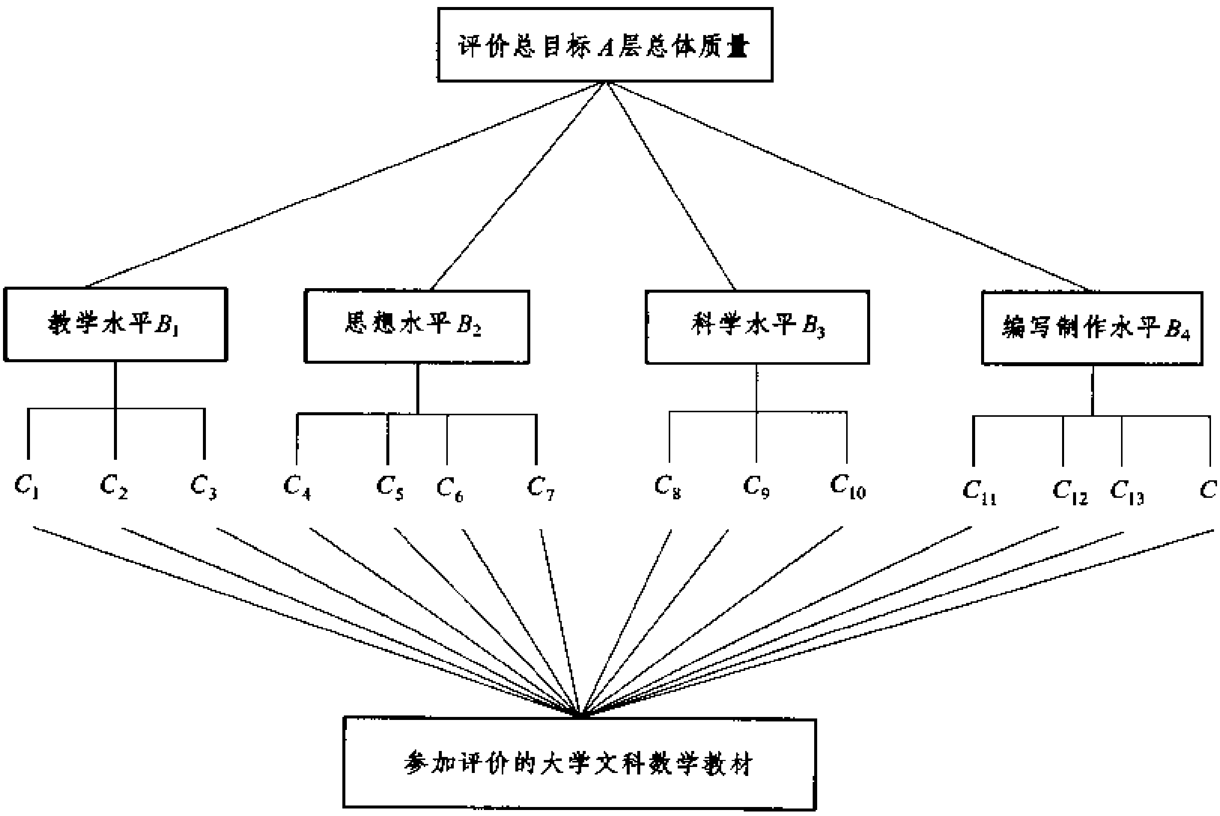


图 1 大学文科数学教材质量评估体系层次结构图

3.3.2 权向量的确定

为了客观地确定各评价指标在相应的评价项目中的重要性程度，通过对专家和长期从事文

科数学教学的老师意见的收集，以及作者参阅有关文献，进行综合分析，建立了总目标总体质量 A，教学水平 B_1，科学水平 B_2，思想水平 B_3，编写制作水平 B_4 的成对比较矩阵如下：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 3\\ 1/2 & 1 & 3 & 2\\ 1/5 & 1/3 & 1 & 2\\ 1/3 & 1/2 & 1/2 & 1\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1/3\\ 1/2 & 1 & 1/5\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1/3 & 1/4\\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/3\\ 3 & 2 & 1 & 1/2\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$B_3=\begin{pmatrix}1 & 1/3 & 2\\ 3 & 1 & 3\\ 1/2 & 1/3 & 1\end{pmatrix},\quad B_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 4\\ 1/2 & 1 & 3 & 3\\ 1/4 & 1/3 & 1 & 1\\ 1/4 & 1/3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

依据成对比较矩阵求权向量的特征根法，计算各比较矩阵的特征向量，得到数据如下：

$$W=(0.479,\quad 0.268,\quad 0.135,\quad 0.118)^{\mathrm{T}}$$
$$W_1=(0.230,\quad 0.122,\quad 0.648)^{\mathrm{T}}$$
$$W_2=(0.144,\quad 0.119,\quad 0.276,\quad 0.462)^{\mathrm{T}}$$
$$W_3=(0.252,\quad 0.589,\quad 0.160)^{\mathrm{T}}$$
$$W_4=(0.484,\quad 0.297,\quad 0.110,\quad 0.110)^{\mathrm{T}}$$

各比较矩阵的一致性指标分别为

$$\mathrm{CI}_A=0.061\,1,\ \mathrm{CI}_{B_1}=0.002,\ \mathrm{CI}_{B_2}=0.052,\ \mathrm{CI}_{B_3}=0.027,\ \mathrm{CI}_{B_4}=0.007$$

再根据随机一致性指标 RI 的取值，即当阶数 $n=3$ 时，$\mathrm{RI}=0.58$；当阶数 $n=4$ 时，$\mathrm{RI}=0.90$，就可以得到以上矩阵的一致性比率：

$$\mathrm{CR}_A=0.067\,9,\ \mathrm{CR}_{B_1}=0.003,\ \mathrm{CR}_{B_2}=0.058,\ \mathrm{CR}_{B_3}=0.046,\ \mathrm{CR}_{B_4}=0.008$$

由于都小于 0.1，故通过了一致性检验，因此 W，W_1，W_2，W_3，W_4 可以作为权向量. 又

$$\mathrm{CI}^{(3)}=\left(\mathrm{CI}_1^{(3)},\ \mathrm{CI}_2^{(3)},\ \mathrm{CI}_3^{(3)},\ \mathrm{CI}_4^{(3)}\right)W^{(2)}=(0.002, 0.052, 0.027, 0.007)\begin{pmatrix}0.479\\ 0.268\\ 0.135\\ 0.118\end{pmatrix}=0.019\,4$$

同理，

$$\mathrm{RI}^{(3)}=\left(\mathrm{RI}_1^{(3)},\ \mathrm{RI}_2^{(3)},\ \mathrm{RI}_3^{(3)},\ \mathrm{RI}_4^{(3)}\right)W^{(2)}=(0.58, 0.58, 0.90, 0.90)\begin{pmatrix}0.479\\ 0.268\\ 0.135\\ 0.118\end{pmatrix}=0.661\,0$$

$$\mathrm{CR}^{(3)}=\frac{0.019\,4}{0.661\,0}=0.029\,3$$

$$\mathrm{CR}^* = \mathrm{CR}_A + \mathrm{CR}^{(3)} = 0.029\,3 + 0.067\,9 = 0.097\,2 < 0.1$$

则表示通过了组合一致性检验，如表 1 所示.

表 1　层次总排序及一致性检验

层次 B / 层次 C	B_1	B_2	B_3	B_4	总排序 W_{ij}	一致性检验 CR
	0.479	0.268	0.135	0.118		
C_{11}	0.230	0	0	0	0.110	CI = 0.019 4 RI = 0.661 0 CR = 0.097 2
C_{12}	0.122	0	0	0	0.054	
C_{13}	0.648	0	0	0	0.310	
C_{21}	0	0.144	0	0	0.039	
C_{22}	0	0.119	0	0	0.032	
C_{23}	0	0.276	0	0	0.074	
C_{24}	0	0.462	0	0	0.124	
C_{31}	0	0	0.252	0	0.034	
C_{32}	0	0	0.589	0	0.080	
C_{33}	0	0	0.160	0	0.022	
C_{41}	0	0	0	0.484	0.057	
C_{42}	0	0	0	0.297	0.035	
C_{43}	0	0	0	0.110	0.013	
C_{44}	0	0	0	0.110	0.013	
C_{23}	0	0.276	0	0	0.074	
C_{24}	0	0.462	0	0	0.124	
C_{31}	0	0	0.252	0	0.034	
C_{32}	0	0	0.589	0	0.080	

3.3.3　模型的分析与应用

（1）对 k 个具体的指标给出评价的等级，每项指标评价分为优秀、良好、中等、及格这四个，用百分制给出评价等级赋值如表 2 所示.

表 2　评价等级赋值表

等　级	优　秀	良　好	中　等	及　格
分数	90	80	70	60

（2）调查从事大学文科数学教学的老师和在读文科专业的学生，让他们对每个指标给出等级评价，用各等级出现的频率 P_{ijl} 表示（$i = 1, 2,\cdots, n$；$j = 1, 2, 3,\cdots, m$；$l = 1, 2, 3, 4$）得到评判矩阵 $\boldsymbol{P} = (P_{ijl})_{k\times 4}$.

（3）记 $\boldsymbol{T} = (90,\ 80,\ 70,\ 60)^{\mathrm{T}}$，计算 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}*\boldsymbol{T}$，可得到各项指标的数量评价 R_{ij}，然后计算综合加权值，即：

$$N = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} W_{ij}R_{ij},\quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n;\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$$

式中，N 为教材质量评价综合评值，W_{ij} 为第 i 项准则第 j 项指标的相对重要性权值，R_{ij} 为第 i 项准则第 j 项指标的数量评价.

在重庆文理学院红河校区抽查了 20 人，涉及到文科类的不同专业，对我校使用过的由张国楚、徐本顺等主编的文科数学教材质量进行了调查，其结果如表 3 所示.

表 3　大学文科数学教材质量调查结果表

等级 \ 人数指标	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}
优秀	17	15	19	10	5	2	12	13	18	9	10	18	17	4
良好	2	2	1	5	3	3	5	4	1	5	5	1	1	3
中等	1	2	0	3	5	5	2	2	1	4	3	1	1	7
及格	0	1	0	2	7	10	1	1	0	2	2	0	1	6
参加调查的总人数	20													

那么整理后该教材的评判矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 & 0 \\ 0.75 & 0.1 & 0.1 & 0.05 \\ 0.95 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.15 & 0.1 \\ 0.25 & 0.15 & 0.25 & 0.35 \\ 0.1 & 0.15 & 0.25 & 0.5 \\ 0.6 & 0.25 & 0.1 & 0.05 \\ 0.65 & 0.2 & 0.1 & 0.05 \\ 0.9 & 0.05 & 0.05 & 0 \\ 0.45 & 0.25 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.25 & 0.15 & 0.1 \\ 0.9 & 0.05 & 0.05 & 0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \\ 0.2 & 0.15 & 0.35 & 0.3 \end{pmatrix}$$

用 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{PT}$ 计算出该文科数学教材的各指标评价得分分别为

$$R_{11}=88,\quad R_{12}=85.5,\quad R_{13}=89.5,\quad R_{21}=81.5,\quad R_{22}=73,\quad R_{23}=68.5,\quad R_{24}=84$$

$$R_{31}=84.5,\quad R_{32}=88.5,\quad R_{33}=80.5,\quad R_{41}=81.5,\quad R_{42}=88.5,\quad R_{43}=87,\quad R_{44}=72.5$$

综合评价得分为

$$N=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}W_{ij}R_{ij}=84.58$$

可知该大学文科数学教材处于良好水平.

依据此方法，还对我校正在使用的由陈吉象编写的《文科数学基础》这本教材进行了评价，其评价结果如表 4：

表 4　文科数学基础教材质量调查结果表

人数指标 / 等级	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}
优秀	15	13	12	5	3	5	10	10	15	9	9	13	14	4
良好	3	2	4	6	4	8	5	2	4	5	8	3	4	8
中等	1	4	3	7	5	3	3	6	1	4	1	2	1	5
及格	1	1	1	2	8	4	2	2	0	2	2	2	1	3
参加调查的总人数	20													

那么整理后该教材的评判矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0.75 & 0.15 & 0.05 & 0.05 \\ 0.65 & 0.1 & 0.2 & 0.05 \\ 0.6 & 0.2 & 0.15 & 0.05 \\ 0.25 & 0.3 & 0.35 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.4 \\ 0.25 & 0.4 & 0.15 & 0.2 \\ 0.5 & 0.25 & 0.15 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ 0.75 & 0.2 & 0.05 & 0 \\ 0.45 & 0.25 & 0.2 & 0.1 \\ 0.45 & 0.4 & 0.05 & 0.1 \\ 0.65 & 0.15 & 0.1 & 0.1 \\ 0.7 & 0.2 & 0.05 & 0.05 \\ 0.2 & 0.4 & 0.25 & 0.15 \end{pmatrix}$$

用 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{PT}$ 计算出该文科数学教材的各指标评价得分分别为

$R_{11}=86$，　$R_{12}=83.5$，　$R_{13}=83.5$，　$R_{21}=77$，　$R_{22}=71$，　$R_{23}=77$，　$R_{24}=81.5$

$R_{31}=80$，　$R_{32}=87$，　$R_{33}=80.5$，　$R_{41}=82$，　$R_{42}=83.5$，　$R_{43}=85.5$，　$R_{44}=76.5$

综合评价得分为

$$N=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}W_{ij}R_{ij}=82.09$$

由此可知该文科数学教材也属于良好水平.

3.3.4　结果分析

从调查统计的结果可以看出，我校所使用的两本文科数学教材所得的分数都比较理想，这两本文科数学教材的整休质量都比较好. 说明我校对于开设文科数学这一课程还是很重视的，在对教材的选择方面把握得很好，还有我校的文科数学教学质量也比较高，这是与我校领导的重视和教师的努力分不开的.

由张国楚、徐本顺等主编的《大学文科数学》这本教材相对于由陈吉象编写的《文科数学基础》这本教材所得的分数要稍高一点，这也和老师、同学的反映相一致. 这两本文科数学教材评价的大部分指标的分数都在 80 分以上，只有少数指标的分数在 60 和 70 分左右. 在这两

本文科数学教材中，它们所展示的内容结构都很完整，教材的系统性、理论性方面都把握得很好，不过个别指标如独特性得分的情况都不大理想．还有教材在新颖性、风格特色方面做得还不够好，有待改进．这可能是多数教材都应该注意的问题．出现这些问题的原因可能是由于文科数学这门课程相对于其专业课程来说，开设的历史较短，在教材建设方面还应更加完善．

3.4 文科数学教材建设的一些建议

目前，文科专业的学生学习数学课程的情况并不是很好，尤其是在教材建设方面．主要的问题是由于我国文科高等数学教学大纲和教材还处在试验的初级阶段．传统的教材在应试教育思想的影响下，还存在许多的问题：首先是内容偏重系统化的分科知识，文理不能渗透，教材还停留在传统理工科高等数学的基本套路里，注重灌输一些僵化的纯形式化的数学知识，学生的练习也局限于通过机械的形式操练来熟悉这些数学公式和定理；其次是重知识轻能力，知识与社会实践脱节，在教材中讲解了大量的数学专业知识，而其中的知识却与人类社会的联系较少；再次，文科数学教材大多比较死板，无任何趣味性，教材编写也无新颖性和独特性，不能吸引学生的注意力；最后，文科数学教材中对数学史的讲解甚少．

我们知道文科数学针对的是文科生，在这里主要强调的是数学的思想、文化与应用的方面．针对上述缺点，文科数学教材内容设置应作如下改革：首先，应本着科学性的原则，在内容上和能力培养重点上都应从文科生的实际水平出发，结合文科专业特点从文科专业与自然科学交叉的角度提出课题，设置内容，将两个学科有机地结合起来，注重数学的应用，多介绍数学与人类社会方面的联系，以增进学生对人类文明的理解；其次，教材的编写应侧重于培养学生的数学素质．我们知道文科生学习数学除传授必要的专业知识外，应特别注意培养学生的数学素质，在某种意义上说，后者比前者还要重要；再次，在文科数学教材中编写者应该考虑增加数学的趣味性，由浅入深的讲解数学知识；最后，教材中可以讲解些数学发展史及当前数学发展状况．有不少的学生希望在上数学课中可以了解到这些知识．教材还要适当地多介绍数学应用的实际例子，通过大量实例，不仅能让学生加深对数学应用广泛性的认识，还能让文科生对数学在科学技术、经济管理、日常生活中的作用有更深刻的理解．

现在的文科生与以前的学生不大一样，他们形象思维能力较强，思维较活跃，知识面较广，渴望了解世界和汲取新知识，教材对他们的影响较大．而衡量一本教材的好坏不应以内容的难易为标准，重要的是看其是否有实用价值．通过以上分析，希望通过学校、老师和大家的共同努力，可以提高文科数学教材质量，从而让文科数学的教学水平有较大的提高，达到学校和学生双赢的效果．

4 结 论

本文通过分析教材在教学中的作用与地位、重要性以及国内外教材质量评价现状，综合阐述了对于大学文科数学教材质量评价研究的必要性．并针对我国教材质量理论研究的一些缺陷，分四个章节对我国大学文科数学教材质量指标体系进行了系统的分析与研究．科学、公正、

客观的评价指标体系是教材质量评价的核心和前提．教材质量指标体系的建立需要经过一个严格筛选、简化、建立、确定权集的过程．教材评价的过程与方法也是非常严谨的，需要完成评估信息的采集、评估数据的处理、总结等多项工作，才能最后得出评价结果．评估结果的利用将会达到教材评价的最终目的．本文在进行理论研究的同时，还将评估的理论运用到评价文科数学教材上，为我校的文科数学教材质量评价实践提供参考．

作者通过对教材质量评价理论与方法的研究，对该项工作有了初步的了解，也深感该项工作对于建设高等学校教材工作的重要性．今后还要进一步加强学习，积累经验，对教材质量评价的相关技术与方法、国内外教材评价工作比较、研究等方面作深入的探讨．

参 考 文 献

[1] 陈亚玲．教材的作用、选用与使用[J]．盐城工学院学报．1999，12（2）：64～66

[2] T.L.Saaty．*The analytic hierarchy process* [M]．McGraw–Hill Company，1980

[3] 杨曙光．关于开设大学文科数学课程的思考[J]．湖北民族学院学报．2003，21（4）：93～96

[4] 卢飞雁．高校文科数学教育的发展与思考[J]．浙江师范学院学报．2005，6（3）：104～105

[5] 高凌飚．教材评估的模型和层次[J]．课程•教材•教法．2001（3）：1～5

[6] 顾沛．文科数学的教学改革[J]．中国大学教学．2004（8）：11～13

[7] 孙海放，李荣，余巍巍．高校教材建设运行机制探索[J]．中国市场．2006（25）：24～25

[8] 吴铁军，王耀，朱新涛．实施教材工作评估，加强教材工作管理[J]．经济经纬．1996（4）：37～39

[9] 文大为．博士、硕士学位授权点评估体系与方法的研究与实践[J]．中南大学．2003（5）：13～18

[10] 刘中仁，熊斌．高等教育教材质量指标体系初探[J]．中国大学教学．2001（5）：28～30

[11] 丁朝蓬．教材评价指标体系的建立[J]．课程•教材•教法．1998（7）：43～46

[12] 姜启源．数学模型（第三版）[M]．北京：高等教育出版社，2003

[13] 张国楚，徐本顺等．大学文科数学[M]．北京：高等教育出版社，2001

[14] 陈吉象．文科数学基础[M]．北京：高等教育出版社，2003

[15] 陈跃．采用美国教材进行文科数学教学初探[J]．上海师范大学学报．1998，27（4）：66～70

[16] 王新长．高等院校文科数学教育的现状与发展对策初探[J]．中国大学教学．2004（8）：11～13

[17] 邱曙熙．高等学校文科数学教材探讨[J]．漳州师范学院学报．1998（2）：90～94

附表 1（作者制定的文科数学教材质量评价表）

大学文科数学教材质量评价表

<table>
<tr><td>教材名称</td><td></td><td>版　本</td><td></td><td>主编姓名</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>出版社</td><td></td><td>出版日期</td><td></td><td>使用教材专业</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">指标</td><td rowspan="2">质量指标体系</td><td colspan="3" rowspan="2">指标内涵</td><td colspan="4">评价结果</td></tr>
<tr><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td rowspan="3">教学水平</td><td>教学适应性</td><td colspan="3">符合本门课程教学大纲及专业培养目标要求；分量适中，受益面较大</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>认识规律性</td><td colspan="3">符合学生认知规律，富有启发性，有利于学生能力的培养</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>结构完整性</td><td colspan="3">序、绪、正文、习题、思考题、文献基本齐全</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">思想水平</td><td>前沿性</td><td colspan="3">能反映本门学科国内外先进科研成果和教学成果</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>新颖性</td><td colspan="3">内容例习题较新颖，符合本学科的教学要求</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>独特性</td><td colspan="3">有独特的构思，且利于本专业的学习</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>思想性</td><td colspan="3">思想观点正确，符合唯物主义和辩证法，无政治性错误</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">科学水平</td><td>系统性</td><td colspan="3">能完整地表达本门课程所包含的知识，反映其相互联系及发展规律，结构严谨</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>理论性</td><td colspan="3">能正确地阐述本门学科的科学理论和概念，注意理论联系实际</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>逻辑性</td><td colspan="3">层次分明、条理清楚、逻辑性强</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">编写制作水平</td><td>语言文字</td><td colspan="3">语言流畅，叙述生动，文字规范，简练、可读性强，便于自学</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>图表</td><td colspan="3">图表清晰、准确，符号、单位符合国家标准</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>印刷质量</td><td colspan="3">印刷清晰、正确，无缺页、错页、掉页、损页、白页，无颠倒、装订平整</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>风格特色</td><td colspan="3">内容、结构、体系安排有鲜明特色</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

注：1. 综合评价结果计算方法：A 为（优秀 90 分），B 为（良好 80 分），C 为（中等 70 分），D 为（及格 60 分）.

2. 各指标权重分别为（0.11，0.054，0.31，0.039，0.032，0.074，0.124，0.034，0.08，0.022，0.057，0.035，0.013，0.013）.

附表 2（我校所使用的教材质量评价表）

重庆文理学院选用教材质量评价表

系（院）：__________　　评价人：__________　　评价时间：　　年　　月　　日

课程名称		教材名称		版　本	
主编姓名		出版社		出版日期	

使用教材专业						
指标	质量指标体系	指标内涵	评价结果			
			A	B	C	D
思想性	思想性	坚持社会主义方向，符合党的方针、政策，能够运用辩证唯物主义、历史唯物主义的方法，全面、准确地阐述本学科的基本理论、概念，分析解决现实中的理论问题和现实问题				
教育性	教学适应性	符合人才培养目标及本课程教学大纲的要求				
	认识规律性	符合认知规律，富有启发性，便于学习，有利于激发学生学习兴趣及能力的培养				
	结构完整性	绪论、正文、习题、思考题、索引、参考文献齐全				
科学性	先进性	能反映本门学科国内外科学研究的先进成果				
	系统性	能完整地表达本门课程所包含的知识，反映其相互联系及发展规律，结构严谨				
	理论性	能正确地阐述本门学科的科学理论和概念，注意理论联系实际				
	逻辑性	层次分明、条理清楚，教材体系能够反映内容的内在联系及本专业特有的思维方法				
文图水平		文字规范、简练，符合语法规则，语言流畅、通俗易懂、叙述生动，图文配合恰当，图表清晰、准确，符号、计量单位符合国家标准				
印刷质量		印刷清晰、正确，无缺页、白页、脏页，无颠倒、装订平整				
风格特色		内容、结构、体系安排有鲜明特色				
综合评价结果（优秀、良好、一般、不合格）						
改进措施及建议						

注：综合评价结果计算方法：思想性为 D 者，为不合格教材；A >= 8 并且 D = 0 为优秀；A >= 6 并且 D <= 1 为良好；A >= 4 并且 0 < D <= 2、A < 4 并且 D = 0 为一般；其他为不合格．各指标权重均相等．

大学生生活质量的评价与分析

冉 桠

【摘 要】随着社会进步和人类生活水平的逐年提高，“生活质量”（Quality of Life，简称QOL）已成为国人不再陌生的字眼．大学生作为“以学为主”的群体，虽然不过多追求生活享受，但对自身的生活质量问题同样也予以特别的关注．然而，人们包括大学生在内，对生活质量的理解仍停留在“过得好就是生活质量高”的层面，有待于深入研究和加以探讨．依据某大学的某位大学生的生活质量评估卡的调查数据，利用层次分析法建立了某位大学生生活质量的定量评价模型 $P=WR$，并运用该模型对某校的三位大学生张某、李某、王某的生活质量作了定量比较分析．分析结果表明，社会的发展和对人才的高标准和严要求，以及生活环境的闭塞使得当代的大学生在心理领域方面和环境领域方面都得分较低，所以应配合其他三个领域和结合大学生自身的特点加以改善和调整，来使大学生的生活质量得到更好的提高．

【关键词】大学生 生活质量 评价与分析 层次分析法

1 引 言

1.1 研究背景

生活质量（quality of life，简称QOL）又称为生存质量或生命质量．20世纪30年代作为一个社会学专门术语出现，促使形成了一个新的研究领域，其研究于50～60年代在国外进入兴盛时期，70年代备受医学领域瞩目，且形成又一新的研究热潮．世纪之交则呈现向社会学等领域扩展之势．我国涉足此领域始于80年代中期，目前研究工作主要限于医疗卫生领域，存在一些向其他研究领域扩展的迹象．虽然我国对大学生生活质量的研究尚处于摸索阶段，未有任何成熟的报道，但还是有越来越多的人在开始关注大学生的生活质量．随着医学模式的改变，健康不再是没有疾病或虚弱的状态，而是身体上、精神上和社会适应的完好状态．传统的只关注生命的质量和局部躯体功能的改善的健康评价方法受到严重的挑战，而与健康有关的生活质量的探讨逐渐成为研究的热点．大学生作为一个特殊的群体，面临着接受知识，并为日后成为国家栋梁之才作准备．所以对大学生生活质量的研究越来越重要．

1.2 研究内容

大学生的生活质量研究从健康的完整意义出发，力求从生理、心理、环境、社会关系和身体健康等各个领域入手了解大学生这一特殊群体的综合生活经历状况，从中找出相关的影响因

素，来进一步了解和分析大学生的生活质量，从而为改进教育教学活动，提高教育的针对性和有效性服务．从生活质量的角度，可以有效地综合把握大学生对大学生活的客观反应和主观感受，有机地把“实在性”和“可能性”结合起来，避免了“生理”或“心理”单一视角看问题所带来的局限性，使有关大学生的研究视野更为宽广，更符合整体化观念．

1.3 研究结构

本论文采用数学模型中的层次分析法建立了某位大学生生活质量的定量评价模型 $P = WR$，并运用该模型对某校的三位大学生张某、李某、王某的生活质量作了定量比较分析，来帮助我们更进一步的了解和分析大学生的生活质量．本论文的大致结构如下：

第一章：研究大学生生活质量的背景与内容．

第二章：对本文所采用的层次分析法作简单介绍．

第三章：建立和构造某位大学生生活质量的综合评价模型．

第四章：运用第三章的综合评价模型来对张某、李某、王某三位同学的生活质量进行定量计算．

第五章：根据第四章得出的三位同学的生活质量量表来进行结果分析．

第六章：对论文进行总结．

2 层次分析法

2.1 层次分析法简介

层次分析法（AHP）是将决策有关的元素分解成目标、准则、方案等层次，在此基础之上进行定性和定量分析的决策方法．该方法是美国运筹学家匹茨堡大学教授萨蒂于 20 世纪 70 年代初，在为美国国防部研究“根据各个工业部门对国家福利的贡献大小而进行电力分配”课题时，应用网络系统理论和多目标综合评价方法，提出的一种层次权重决策分析方法．这种方法的特点是在对复杂的决策问题的本质、影响因素及其内在关系等进行深入分析的基础上，利用较少的定量信息使决策的思维过程数学化，从而为多目标、多准则或无结构特性的复杂决策问题提供简便的决策方法．尤其适合于对决策结果难于直接准确计量的场合．

2.2 层次分析法的具体步骤

层次分析法的四个基本步骤：

（1）建立层次结构模型．在深入分析实际问题的基础上，将有关的各个因素按照不同属性自上而下地分解成若干层次．同一层的诸因素从属于上一层的因素或对上层因素有影响，同时又支配下一层的因素或受到下层因素的作用，而同一层的各因素之间尽量相互独立．最上层为目标层，通常只有 1 个因素，最下层通常为方案或对象层，中间可以有 1 个或几个层次，通常为准则或指标层．当准则层过多时（比如多于 9 个）应进一步分解出子准则层．

（2）构造成对比较阵．从层次结构模型的第 2 层开始，对于从属于（或影响及）上一层每

个因素的同一层诸因素，用成对比较法和 1～9 比较尺度构造成对比较阵直到最下层.

（3）计算权向量并做一致性检验. 对于每一个成对比较阵计算最大特征根及对应特征向量，利用一致性指标、随机一致性指标和一致性比率做一致性检验. 若检验通过，特征向量（归一化后）即为权向量；若不通过，需重新构造成对比较阵.

（4）计算组合权向量并做组合一致性检验. 利用公式

$$w^{(s)}=W^{(s)}W^{(s-1)}\cdots W^{(3)}W^{(2)}$$

计算最下层对目标的组合权向量，并酌情做组合一致性检验. 若检验通过，则可按照组合权向量表示结果进行决策，否则需要重新考虑模型或重新构造那些一致性比率 CR 较大的成对比较阵.

2.2.1 成对比较矩阵和权向量

涉及到社会、经济、人文等因素的决策问题的主要困难在于，这些因素通常不易定量地测量. 人们凭自己的经验和知识进行判断，当因素较多时给出的结果往往是不全面和不准确的. 如果只是定性的结果，则常常不容易被别人接受. Saaty 等人的做法，一是不把所有因素放在一起比较，而是两两相互对比，二是对比时采用相对尺度，以尽可能地减少性质不同的诸因素相互比较的困难，提高准确度.

（1）成对比较矩阵. 假设要比较某一层 n 个因素 C_1，C_2，…，C_n 对上层一个因素 O 的影响，每次取两个因素 C_i 和 C_j，用 a_{ij} 表示 C_i 和 C_j 对 O 的影响之比，全部比较结果可用成对比较矩阵

$$A=(a_{ij})_{n\times n},\quad a_{ij}>0,\quad a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}} \tag{1}$$

表示. 由于（1）式给出的 a_{ij} 的特点，则称 A 为正互反矩阵. 显然必有 $a_{ii}=1$.

一般地，如果一个正互反矩阵 A 满足

$$a_{ij}a_{jk}=a_{ik},\quad (i,j,k=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

则称 A 为一致性矩阵，简称一致阵.

（2）权向量. 如果得到的成对比较矩阵是一致阵，自然应取对应于特征根 n 的、归一化的特征向量（即分量之和为 1）表示诸因素 C_1，C_2，…，C_n 对上层因素 O 的权重，这个向量称为权向量.

如果成对比较矩阵 A 不是一致阵，但在不一致的容许范围内，Saaty 等人建议用对应于 A 的最大特征根（记作 λ）的特征向量（归一化后）作为权向量 w，即 w 满足

$$Aw=\lambda w \tag{3}$$

2.2.2 比较尺度

在比较两个具有不同性质的因素 C_i 和 C_j 对于一个上层因素 O 的影响时，Saaty 等人提出用 1～9 尺度，即 a_{ij} 是取值范围是 1，2，…，9 及其互反数 1，1/2，…，1/9.

2.2.3 一致性检验

成对比较阵通常不是一致阵，但是为了能用它的对应于特征根 λ 的特征向量作为被比较因素的权向量，其不一致程度应在容许范围内.

（1）一致性指标.

定理：n 阶正互反阵 A 的最大特征根 $\lambda \geqslant n$；当 $\lambda = n$ 时，A 是一致阵.

根据这个定理和 λ 连续地依赖于 a_{ij} 的事实可知，λ 比 n 大得越多，A 的不一致程度越严重，用特征向量作为权向量引起的判断误差越大. 因而可以用 $\lambda - n$ 数值的大小来衡量 A 的不一致性程度. Saaty 将

$$\mathrm{CI} = \frac{\lambda - n}{n-1} \tag{4}$$

定义为一致性指标. CI = 0 时，A 为一致阵；CI 越大，A 的不一致程度越严重，注意到 A 的 n 个特征根之和恰好等于 n，所以 CI 相当于除 λ 外其余 $n-1$ 个特征根的平均值.

（2）随机一致性指标.

对于固定的 n，随机地制造正互反阵 A'（它的元素 $a'_{ij}(i<j)$ 从 1～9，1～1/9 中随机取值），然后计算 A' 的一致性指标 CI，可以想到，A' 是非常不一致的，它的 CI 相当大，如此构造相当多的 A'，用它们的 CI 的平均值作为随机一致性指标. Saaty 对于不同的 n，用 100～500 个样本 A' 算出的随机一致性指标 RI 的数值如表 1 所示.

表 1　随机一致性指标 RI 的数值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

表中 $n = 1$，2 时，RI = 0，是因为 1，2 阶的正互反阵总是一致阵.

对于 $n \geqslant 3$ 点成对比较阵 A，将它的一致性指标 CI 与同阶（指 n 相同）的随机一致性指标 RI 之比称为一致性比率 CR，当

$$\mathrm{CR} = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{RI}} < 0.1 \tag{5}$$

时，认为 A 的不一致程度在容许范围之内，可用其特征向量作为权向量.

对于 A，利用（4）式，（5）式和表 2 进行检验称为一致性检验. 当检验不通过时，要重新进行成对比较，或对已有的 A 进行修正.

2.2.4　组合权向量和组合一致性检验

（1）组合权向量.

层次模型若有 s 层，则第 k 层对第 1 层（设只有 1 个因素）的组合权向量满足

$$w^{(k)} = W^{(k)} W^{(k-1)}, \quad (k = 3, 4, \cdots, s) \tag{6}$$

其中 $W^{(k)}$ 是以第 k 层对第 $k-1$ 层的权向量为列向量组成的矩阵. 于是最下层（第 s 层）对最上层的组合权向量为

$$w^{(s)} = W^{(s)} W^{(s-1)} \cdots W^{(3)} W^{(2)} \tag{7}$$

（2）组合一致性检验.

在应用层次分析法作重大决策时，除了对每个成对比较阵进行一致性检验外，还常要进行所谓组合一致性检验，以确定组合权向量是否可以作为最终的决策依据.

组合一致性检验可逐层进行．若第 p 层的一致性指标为 $\mathrm{CI}_1^{(p)}$，…，$\mathrm{CI}_n^{(p)}$（n 是第 $p-1$ 层因素的数目），随机一致性指标为 $\mathrm{RI}_1^{(p)}$，…，$\mathrm{RI}_n^{(p)}$，定义

$$\mathrm{CI}^{(p)}=(\mathrm{CI}_1^{(p)},\cdots,\mathrm{CI}_n^{(p)})w^{(p-1)} \tag{8}$$

$$\mathrm{RI}^{(p)}=(\mathrm{RI}_1^{(p)},\cdots,\mathrm{RI}_n^{(p)})w^{(p-1)} \tag{9}$$

则第 p 层的组合一致性比率为

$$\mathrm{CR}^{(p)}=\frac{\mathrm{CI}^{(p)}}{\mathrm{RI}^{(p)}},\quad (p=3,4,\cdots,s) \tag{10}$$

第 p 层通过组合一致性检验的条件为 $\mathrm{CR}^{(p)}<0.1$．

定义最下层（第 s 层）对第 1 层的组合一致性比率为

$$\mathrm{CR}^{*}=\sum_{p=2}^{s}\mathrm{CR}^{(p)} \tag{11}$$

对于重大项目，仅当 CR^{*} 适当小时，才认为整个层次的比较判断通过一致性检验．

以前我们对大学生生活质量的分析大多停留在定性的研究上，人的主观意识会起着相当主要的作用，并不能客观的反映事实的真相．所以我们采用层次分析法来定性与定量地评价与分析大学生的生活质量．

3 综合评价模型

3.1 大学生生活质量的评价指标

世界卫生组织生存质量测定量表（Whoqol-Bref）有 26 个测定指标．它包括生理、心理、社会关系、环境等四个领域的 24 个条目和总的生存质量和总的健康状况．依据此量表并结合大学生自身特点和大学校园的文化背景以及健康测量的发展，经过反复论证，最终选择了与大学生息息相关的 14 个指标来评价与分析大学生的生活质量：

C_1 —— 疼痛与不适；C_2 —— 精力与疲倦；C_3 —— 睡眠与休息；C_4 —— 积极感受；C_5 —— 思想、学习、记忆和注意力；C_6 —— 自尊；C_7 —— 身材与相貌；C_8 —— 消极感受；C_9 —— 人际关系；C_{10} —— 所需社会支持的满足程度；C_{11} —— 情感生活；C_{12} —— 物质生活条件；C_{13} —— 休闲娱乐活动的参与机会与参与程度；C_{14} —— 获取信息、知识、技能的机会．

3.2 调查方法

把评价大学生生活质量的 14 个指标做成一张测定量表．每个指标的满分为 100 分．并且规定 95 分为 A 等，80 分为 B 等，70 分为 C 等，60 分为 D 等，45 分为 E 等．在调查员的指导下，由每位被测同学身边的亲戚、朋友、老师和同学共 105 位根据被测同学的实际情况来打分．打分完毕由调查人员复核、检查，及时补漏确保问卷合格．

3.3　多层次模型

依据层次分析法，我们将评价总目标 A = 大学生生活质量的评价与分析，分解成五个层次（见图 1），$A=\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$，其中，生理领域 $B_1=\{C_1, C_2, C_3\}$，心理领域 $B_2=\{C_4, C_5, C_6, C_7, C_8\}$，社会关系领域 $B_3=\{C_9, C_{10}, C_{11}\}$，环境领域 $B_4=\{C_{12}, C_{13}, C_{14}\}$，健康状况 B_5，C_i（$i=1, 2, \cdots, 14$）及健康状况为评价指标.

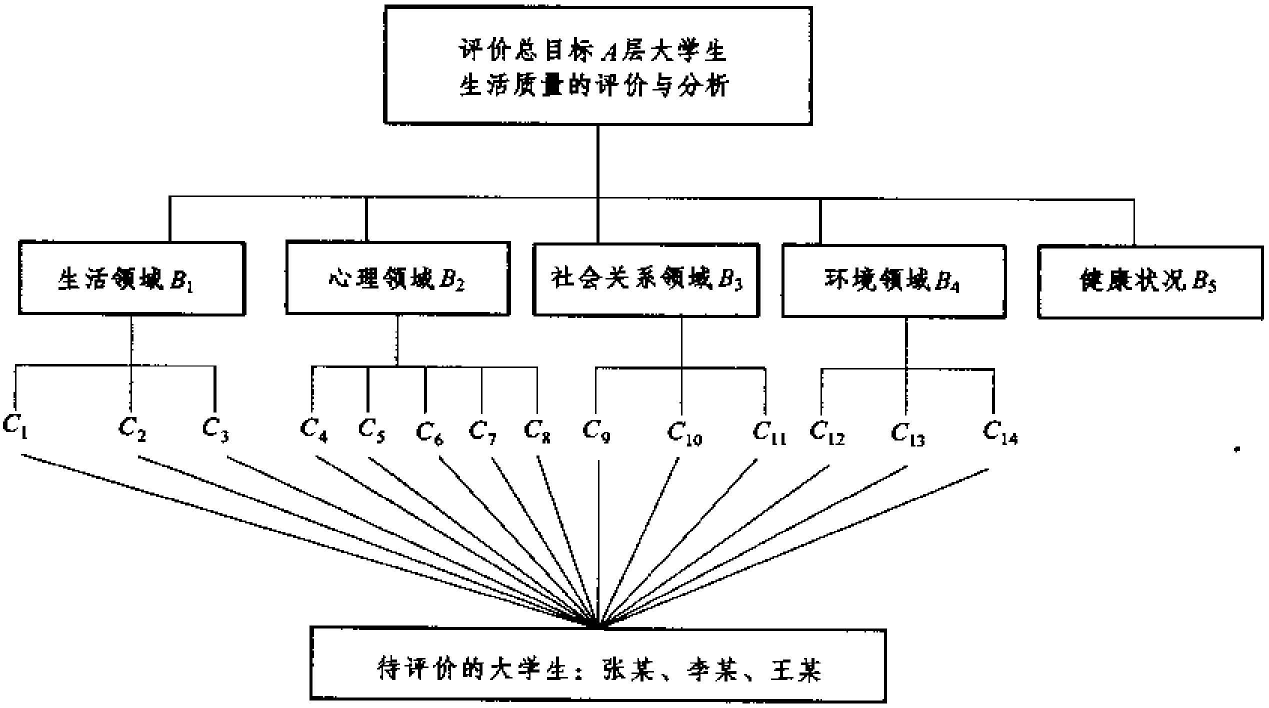


图 1　大学生生活质量的评价与分析层次结构图

对某位大学生的生活质量的评价，首先由某位大学生身边的亲戚、朋友、老师和同学依据评价指标，结合该同学的自身情况，并根据评价等级赋值表如实的打出每个指标的评价等级. 以各等级出现的频率 $P_{kl}^{(i)}$ 作为元素，构成次级评价目标 B_i 的评判矩阵 $\boldsymbol{R}_i$（$i=1, 2, 3, 4, 5$），即 $\boldsymbol{R}_i=(P_{kl}^{(i)})_{n_i\times 5}$，其中 $n_1=3$，$n_2=5$，$n_3=3$，$n_4=3$. 假设 C 层次级指标对 B 层指标 B_i 的权重向量为 $\boldsymbol{W}_i=(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \cdots, a_{n_i}^{(i)})$，则可得 B_i 的综合评判矩阵

$$\boldsymbol{P}_i=\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{R}_i=(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \cdots, a_{n_i}^{(i)})\begin{pmatrix} p_{11}^{(i)} & p_{12}^{(i)} & p_{13}^{(i)} & p_{14}^{(i)} & p_{15}^{(i)} \\ p_{21}^{(i)} & p_{22}^{(i)} & p_{23}^{(i)} & p_{24}^{(i)} & p_{25}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n_i1}^{(i)} & p_{n_i2}^{(i)} & p_{n_i3}^{(i)} & p_{n_i4}^{(i)} & p_{n_i5}^{(i)} \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, 3, 4, 5)$$

再对上一级目标 A 作综合评价，由次级评价结果，构成总目标的评判矩阵 $\boldsymbol{R}=(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)^{\mathrm{T}}$. 假设 B 层指标对总目标的权重向量为 $\boldsymbol{W}=(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$，则可计算总目标的综合评判结果为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{WR}$. 如果用百分制给评价等级赋值，如表 2 所示.

表 2　评价等级赋值表

等级	A	B	C	D	E
分数	95	80	70	60	45

记 $\boldsymbol{T}=(95\quad 80\quad 70\quad 60\quad 45)^{\mathrm{T}}$，则可计算出该位同学在准则层的各领域得分为

$$F_{P_i}=P_iT,\quad (i=1,2,3,4,5)$$

目标层的综合评价得分为 $F_P=PT$.

3.4 权重向量的确定

为了客观地确定各评价指标在相应的评价项目中的重要性程度，作者在大学生中作了无记名问卷调查，问卷要求学生将各评价指标在各评价项目中依重要性程度递减排序．共收到 122 份答卷，其中有 110 份有效.根据调查结果，依据层次分析法常用的 1-9 尺度，建立总目标生活质量 A，生理领域 B_1，心理领域 B_2，社会关系领域 B_3，环境领域 B_4 的成对比较矩阵如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{5}&\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&\frac{1}{8}\\5&1&2&3&\frac{1}{2}\\3&\frac{1}{2}&1&2&\frac{1}{3}\\2&\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{4}\\8&2&3&4&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&7&3\\\frac{1}{7}&1&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&3&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1&3&\frac{1}{3}&4&\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&1&\frac{1}{8}&2&\frac{1}{6}\\3&8&1&8&2\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{8}&1&\frac{1}{7}\\2&6&\frac{1}{2}&7&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_3=\begin{pmatrix}1&6&2\\\frac{1}{6}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&2&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_4=\begin{pmatrix}1&5&4\\\frac{1}{5}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&2&1\end{pmatrix}$$

依据层次分析法中由成对比较矩阵求权向量的特征根法，计算各比较矩阵特征值及特征向量．得到数据如下：

$$\boldsymbol{W}=(0.051\,0\quad 0.263\,4\quad 0.153\,3\quad 0.093\,4\quad 0.438\,9)$$

$$\boldsymbol{W}_1=(0.669\,4\quad 0.087\,9\quad 0.242\,6)$$

$$\boldsymbol{W}_2=(0.156\,5\quad 0.058\,8\quad 0.454\,0\quad 0.040\,9\quad 0.289\,8)$$

$$\boldsymbol{W}_3=(0.614\,4\quad 0.117\,2\quad 0.268\,4)$$

$$\boldsymbol{W}_4=(0.683\,3\quad 0.116\,9\quad 0.199\,7)$$

各比较矩阵的一致性指标分别为

$$\mathrm{CI}_{B_1}=0.003\,5,\quad \mathrm{CI}_{B_2}=0.017\,1,\quad \mathrm{CI}_{B_3}=0.009\,2,\quad \mathrm{CI}_{B_4}=0.001\,23,\quad \mathrm{CI}_A=0.007\,1$$

一致性比率分别为

$$\mathrm{CR}_{B_1}=0.006\,0,\quad \mathrm{CR}_{B_2}=0.015\,3,\quad \mathrm{CR}_{B_3}=0.015\,9,\quad \mathrm{CR}_{B_4}=0.021\,2,\quad \mathrm{CR}_A=0.006\,3$$

由于都小于 0.1，故通过了一致性检验，因此，上述 $\boldsymbol{W}_1$，$\boldsymbol{W}_2$，$\boldsymbol{W}_3$，$\boldsymbol{W}_4$，$\boldsymbol{W}$ 可作为权重向量.

4　模型的应用

现有某个大学生的生活质量评估调查结果统计表（见表 3），此表是根据某位大学生身边的亲戚、朋友、同学、老师共 105 人，结合此大学生的自身情况，并根据表 3 评价等级赋值表，如实打出每个指标的评价等级，以各等级出现的次数所构成的.

表 3　其中某个大学生生活质量评估调查结果统计表

指标 / 人数 / 等级	B_1			B_2					B_3			B_4			B_5
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	
A	12	9	24	16	22	26	12	14	25	15	13	13	18	19	29
B	28	13	30	20	24	25	18	18	35	29	26	28	23	22	26
C	41	28	27	32	28	24	36	42	19	30	27	32	31	30	35
D	15	42	15	29	17	15	29	15	14	21	29	18	22	21	13
E	9	13	9	8	14	15	10	11	12	10	10	14	11	13	2
参加调查学生总数	105														

那么，该学生生理领域 B_1 的评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{pmatrix}0.1143 & 0.2667 & 0.3905 & 0.1429 & 0.0857\\ 0.0857 & 0.1238 & 0.2667 & 0.4000 & 0.1238\\ 0.2286 & 0.2857 & 0.2571 & 0.1429 & 0.0857\end{pmatrix}$$

心理领域 B_2 的评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{pmatrix}0.1524 & 0.1905 & 0.3048 & 0.2762 & 0.0762\\ 0.2095 & 0.2286 & 0.2667 & 0.1619 & 0.1333\\ 0.2476 & 0.2381 & 0.2286 & 0.1429 & 0.1429\\ 0.1143 & 0.1714 & 0.3429 & 0.2762 & 0.0952\\ 0.1333 & 0.1714 & 0.4000 & 0.1429 & 0.1048\end{pmatrix}$$

社会关系领域 B_3 的评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}_3=\begin{pmatrix}0.2381 & 0.3333 & 0.1810 & 0.1333 & 0.1143\\ 0.1429 & 0.2762 & 0.2857 & 0.2000 & 0.0952\\ 0.1238 & 0.2476 & 0.2571 & 0.2762 & 0.0952\end{pmatrix}$$

环境领域 B_4 的评判矩阵为

$$\boldsymbol{R}_4=\begin{pmatrix}0.1238 & 0.2667 & 0.3048 & 0.1714 & 0.1333\\ 0.1714 & 0.2190 & 0.2952 & 0.2095 & 0.1048\\ 0.1810 & 0.2095 & 0.2857 & 0.2000 & 0.1238\end{pmatrix}$$

健康状况 B_5 的评判矩阵为

$$R_5=(0.276\,2\quad 0.0247\,6\quad 0.333\,3\quad 0.123\,8\quad 0.019\,0)$$

次级目标（B 层）的综合评判矩阵分别为

$$P_1=W_1R_1=(0.139\,5\quad 0.258\,7\quad 0.347\,1\quad 0.165\,5\quad 0.089\,1)$$

$$P_2=W_2R_2=(0.191\,9\quad 0.208\,0\quad 0.297\,1\quad 0.170\,3\quad 0.118\,9)$$

$$P_3=W_3R_3=(0.196\,3\quad 0.363\,6\quad 0.2137\quad 0.179\,5\quad 0.106\,9)$$

$$P_4=W_4R_4=(0.140\,8\quad 0.249\,7\quad 0.299\,8\quad 0.181\,3\quad 0.128\,4)$$

$$P_5=R_5=(0.276\,2\quad 0.247\,6\quad 0.333\,3\quad 0.123\,8\quad 0.019\,0)$$

构成总目标（A 层）的评判矩阵为

$$R=\begin{pmatrix}P_1\\P_2\\P_3\\P_4\\P_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.139\,5&0.258\,7&0.347\,1&0.165\,5&0.089\,1\\0.191\,9&0.208\,0&0.297\,1&0.170\,3&0.118\,9\\0.196\,3&0.303\,6&0.213\,7&0.179\,5&0.106\,9\\0.140\,8&0.249\,7&0.299\,8&0.181\,3&0.128\,4\\0.276\,2&0.247\,6&0.333\,3&0.123\,8&0.019\,0\end{pmatrix}$$

由权重向量为

$$W=(0.051\,0\quad 0.263\,4\quad 0.153\,3\quad 0.093\,4\quad 0.438\,9)$$

可得总目标的综合评判矩阵为

$$P=WR=(0.222\,1\quad 0.246\,5\quad 0.303\,0\quad 0.152\,1\quad 0.072\,6)$$

如果用表 2 评价等级赋值表 $T=(95\quad 80\quad 70\quad 60\quad 45)^{\mathrm{T}}$，则可计算出该同学的各项生活质量评价项目得分分别为

$$F_{P_1}=P_1T=72.185,\quad F_{P_2}=P_2T=71.236\,0,\quad F_{P_3}=P_3T=73.476\,0$$

$$F_{P_4}=P_4T=70.994\,0,\quad F_{P_5}=P_5T=77.661\,0$$

综合评价得分为 $F_P=PT=74.422\,5$，属于中等生活质量.

作者调查了所要研究的每位同学身边的亲戚、好朋友、老师、同学共 105 人. 此次活动要对张某、李某、王某三位同学的生活质量做出评价与分析，所以一共调查了 315 人，来对三位同学的生活质量进行评估. 用上述方法，作者计算出了三个同学的评价结果（见表 4).

表 4　生活质量评估抽样调查评价统计表

得分＼学生	综合评价矩阵 P					生理 F_{P_1}	心理 F_{P_2}	社会关系 F_{P_3}	环境 F_{P_4}	健康 F_{P_5}	综合得分
张某	0.222 1	0.246 5	0.303 0	0.152 1	0.072 6	72.185 0	71.236 0	73.476 0	70.994 0	77.661 0	74.422 5
李某	0.348 0	0.411 8	0.199 6	0.034 5	0.006 2	85.151 1	79.023 4	85.846 0	80.406 0	82.023 4	82.321 3
王某	0.208 4	0.345 8	0.376 7	0.059 6	0.009 6	80.122 5	75.716 6	78.300 6	77.369 6	77.872 1	77.836 5
总体	0.259 5	0.334 7	0.293 1	0.082 1	0.029 5	79.152 7	75.325 3	79.205 7	76.274 7	79.185 5	78.193 4

用上述方法，{及用该指标在各等级出现的频率× $T=(95\quad 80\quad 70\quad 60\quad 45)^{\mathrm{T}}$}，可以计算

出所有参加调查的人（315 人）对三位同学的各项评价指标的得分，分别为 $F_{C_1}=80.12$，$F_{C_2}=76.23$，$F_{C_3}=82.26$，$F_{C_4}=78.39$，$F_{C_5}=75.47$，$F_{C_6}=85.17$，$F_{C_7}=77.58$，$F_{C_8}=80.15$，$F_{C_9}=83.37$，$F_{C_{10}}=78.67$，$F_{C_{11}}=87.81$，$F_{C_{12}}=79.67$，$F_{C_{13}}=73.94$，$F_{C_{14}}=76.47$．

5　结果分析与建议

5.1　结果分析

从生活质量评估抽样调查评价统计表 4 可以看出，在生理领域、心理领域、社会关系领域、环境领域、健康领域这五个项目的调查结果中，李某在各个领域中的得分都是最高的，可见李某在各领域的素质都算是好的．由表也可知道李某的生活质量优于张某与王某．王某又比张某稍好些．

但从总体来看，生理领域、健康领域、社会关系领域要优于心理领域和环境领域．可见随着社会的发展以及高校招生的严格把关，大学生在健康方面是良好的．由于有着强健的体魄以及大学校园这个良好的生活环境，大学生能更好地调节与放松自己，所以他们在生理领域也呈现良好的状态．单纯的生活环境，使大学生在校园里得到了纯真的友谊和情感，所以相对于大学这个社会环境，他们生活得非常好．所以在社会关系领域这块他们是良好的．但是随着时代的发展，就业压力的加大以及社会对大学生的高要求也给现在的大学生带来了一定的压力，经常有报道说大学生退学，大学生得精神分裂症，等等，说明当代大学生的心理素质还是相当薄弱的．虽然大学生有着良好的生活环境和相对稳定的物质生活，但是他们长期生活在大学校园里，很少与社会接触，所以获取社会知识和信息的能力很少，因此他们在环境领域这块也是较弱的．

从总体的各项指标得分来看，各项指标的得分都在 75 分以上，说明大学生的生活质量在整体上接近良好层次．随着社会的发展，物质生活好转以及国家对人才的重视，大学生的生活环境和生活质量越来越好，这也是显而易见的．

在生理领域方面，得分最高的是指标 3，得分最低的是指标 2．因为更多的大学生在没课和闲暇的时候都是睡觉，没有合理的调节时间和安排生活，所以他们在精力与疲倦上得分较低．

在心理领域方面，得分最高的是指标 6，得分最低的是指标 5．可见现在的大学生越来越看重自己，并且他们是这个社会最有活力和朝气的一代，也是最自信的一代，所以他们非常看重自己的自尊．为了迎合这个社会的节拍和跟上时尚的潮流，他们也越来越注重自己的身材与相貌．上面曾说过，时代的发展，就业压力的加大以及社会对大学生的高标准和严要求，使得大学生在心理领域方面相对比较薄弱，因为更多的人看不到现在大学毕业后就业的希望，所以整日抱怨和唉声叹气，因此消极感受比大学生的积极感受得分更高．大学生是经过了中学的辛苦学习而考上的，所以进入大学后，他们体会到了比以前中学更多彩多姿的生活，他们在思想、学习、记忆和注意力上都比以前较为分散，因而在这个指标上得分是最低的．

在社会关系领域方面，指标 11 和 14 得分都是较高的．因为大学校园里的人都比较单纯，所以人际关系也较为简单．没有社会的尔虞我诈，不管是友情、爱情都较为单纯，所以在情感

生活和人际关系上他们的得分较高. 然而现在的大学生是渴望被人认识的一代, 他们希望得到更多的人认识和支持, 所以他们对社会支持的满足程度要求很高, 因而相对的得分也就较低.

在环境领域方面, 指标 12 的得分较高. 因为对于绝大多数的同学来说, 物质生活的好坏取决于父母的经济条件, 在物质生活方面是不用他们去担心的, 并且每个父母都是希望自己的孩子生活的很好, 所以给他们提供了充足的物质条件, 因而在物质生活条件上的得分就较高. 因为大学生长期生活在大学校园里, 所以对指标 13 和 14 的得分也就相对较低.

5.2 提高大学生生活质量的对策和建议

随着经济的发展, 人民生活质量的提高, 大学生的生活质量也越来越高. 传统的只关注生命的量和局部躯体功能的改善已不能说明大学生生活质量的优良了. 如前面所说, 大学生的生活质量是指大学生现实生活经历的客观优劣状态及其主观感受. 这种反映和感受是与大学生的自身心理、心理特点及其所处的大学生活环境密不可分. 大学生作为一个特殊的群体, 面临着接受知识, 并为日后成为国家栋梁之才作准备. 所以已经有越来越多的人在开始关注大学生的生活质量.

那么我们如何来更好地提高大学生的生活质量呢? 结合前面的研究提出了如下的几条建议来帮助有关部门有针对性地改善大学生的生活质量. 第一, 大学生应合理安排自己的作息时间, 不应把多余的时间浪费在睡觉上, 早睡早起使自己精力充沛, 并且可以把多余的时间拿来做一些有用的事情, 来丰富自己的生活. 第二, 加强对大学生心理素质方面的建设, 因为心理领域这块是大学生最薄弱的一块, 所以应加强对大学生的心理教育, 可以多开一些心理辅导课来帮助大学生准确和全面地认识自己, 并积极帮助他们建立自信的生活态度以消除消极感受. 第三, 多组织一些社会实践活动, 让大学生们能更多地与社会接触, 让他们能得到社会更多的支持与满意度. 也让他们得到更多获取信息、知识、技能的机会. 但是也要帮助他们正确认清社会, 树立正确的人际观, 以便他们进入社会后能更好地适应社会. 第四, 虽然大学生健康状况良好, 但对大学生健康状况的关注程度还是不容减少的, 学校还是应定期组织检查身体和开展一些对身体健康有用的活动.

6 结束语

当代大学生是祖国的天之骄子, 更是祖国的未来、民族的希望. 重视和倡导对大学生生活质量的提高成了社会所关心的问题, 越来越多的人加入到了大学生生活质量的评价与分析当中. 但是大多数人在做比较、判断、评价、决策时, 某些因素的重要性、影响力往往难以量化, 人的主观会起着相当主要的作用, 这就给用一般的数学方法解决问题带来本质上的困难. 所以本文采用数学模型中的层次分析法来对大学生的生活质量进行定性与定量相结合的评价与分析. 本文的模型具有广泛的推广和应用价值, 它能全面反映对大学生生活质量的评价与分析, 也可用于其他类型的综合评价问题.

参 考 文 献

[1] 方积乾．生存质量测定方法及应用[M]．北京：北京医科大学出版社，2000

[2] 胡国清，孙振球，黄正南，等．高中生生存质量评定量表的研制与考评[J]．中国卫生统计，2002，19（2）：71～75

[3] 郝元涛，方积乾．世界卫生组织生存质量测定量表中文版介绍及其使用说明[J]．现代康复，2000，4（8）：1 127～1 129

[4] 杨丽，刘盈，吴枫．大学生心理健康调查及心理干预效果评估[J]．中国临床心理学杂志，2005，13（1）：102～104，108

[5] 刘庆武，肖水源，周少平，等．郴州市大学生生活质量研究[J]．预防医学，2003（4）

[6] 张国忠，毛宗福，毕勇毅．大学生生活质量问题试探[J]．当代青年研究，2001（4）

[7] 姜启源．数学模型（第三版）[M]．北京：高等教育出版社，1997

[8] 何睿，何波．硕士研究生综合素质模糊评价系统研究[J]．辽宁工程技术大学学报（社会科学版），2005，7（5）：554～556

[9] 赵立新，王石安，赖元峰．教学质量评估的定量比较评价模型[J]．数学的实践与认识，2005，5（1），12～17

[10] 周雁．福建现代化生活质量评析[J]．福建金融管理干部学院．2005（2）：1～5

[11] 汪向东，王希林，马弘．心理卫生评定量表手册（增订版）[M]．北京：中国心理卫生杂志出版社，1999

[12] 李琴．复旦大学"大学生生活质量调查"[J]．上海：东方早报，2004（4）

[13] 梁洪波．澳粤京三地体育专业大学生生活质量的调查分析[J]．山东体育学院学报，2005，21（4）：54～57

[14] 鲁威，陈福国．生活质量的评价及其在抑郁症领域的应用[J]．上海第二医科大学学报，2005，25（3）：305～308

[15] Simeoni MC.Auqier p.Antoniotti S.et al. *Validation of a French healthrelated quality of life instrument for adolescents：the VSP-A*. Qality Life Res. 2000. 9（4）：393～403

[16] Raphael D. Rukholm E. Brow l. et al. *The quality of life profile adoleseent version：background，deseription，And initial validation*. J Adolese Health. 1996.19（5）：366～75

附件

本论文在模型的应用中所选的大学生是本文所要调查 3 位大学生中的张某. 其余两位大学生李某、王某的生活质量评估则是根据附件中的表 2、表 3 中的数据，沿用第四章模型的应用中的方法，得出两位同学的各项生活质量评价项目的得分和综合评价的得分，并将结果一并附在表 4 中.

表 1 张某生活质量评估调查结果统计表

指标 / 人数 / 等级	B_1			B_2					B_3			B_4			B_5
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	
A	12	9	24	16	22	26	12	14	25	15	13	13	18	19	29
B	28	13	30	20	24	28	18	18	35	29	26	28	23	22	26
C	41	28	27	32	28	24	36	42	19	30	27	32	31	30	35
D	15	42	15	29	17	15	29	15	14	21	29	18	22	21	13
E	9	13	9	8	14	15	10	11	12	10	10	14	11	13	2
参加调查学生总数	105														

表 2 李某生活质量评估调查结果统计表

指标 / 人数 / 等级	B_1			B_2					B_3			B_4			B_5
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	
A	17	14	20	18	25	27	17	19	20	13	18	17	16	22	31
B	35	17	29	25	27	28	15	21	29	25	21	29	22	25	27
C	37	33	30	29	23	24	37	38	24	31	32	33	36	31	36
D	9	38	12	30	18	14	28	13	18	27	26	15	17	19	7
E	7	3	14	3	12	12	8	14	14	9	8	11	14	8	4
参加调查学生总数	105														

表 3 王某生活质量评估调查结果统计表

指标 / 人数 / 等级	B_1			B_2					B_3			B_4			B_5
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	
A	15	11	22	17	20	26	14	16	23	14	21	15	15	21	30
B	32	15	28	23	26	27	16	19	32	27	23	28	21	24	28
C	39	31	29	30	25	26	34	40	19	30	31	30	35	32	27
D	11	39	13	31	18	17	30	17	21	26	19	19	20	18	17
E	8	9	13	4	16	10	11	13	10	8	11	13	14	15	3
参加调查学生总数	105														

高校教学服务部门日常经费分配模型

郭以龙

【摘　要】高校教学服务部门日常经费的分配，主要包括：办公费、差旅费、电话费、邮资费、招待费、会议费等分配．我们遵循兼顾平衡、发展以及经费的有效利用原则，将层次分析理论运用于教学服务部门的日常经费分配中，得到了教学服务部门日常经费分配模型．通过求解该模型，获得各教学服务部门日常经费分配数额点，大大减少了经费分配的随意性；同时，我们自主开发的财务分配软件，使财务人员从繁杂重复的数值计算中摆脱出来，把这些工作交由计算机来做，实现财务分配办公现代化．

【关键词】经费分配　层次分析　模型及软件

1 引　言

1.1 问题的提出及研究意义

我校在引入 ISO 9001 质量管理体系、ISO 14001 环境管理体系和 GB/T28001 职业健康安全管理体系，创建并实施“三标一体”教育质量模型过程中，确立了“教育即服务，学生即顾客，质量即生命”的办学理念，将校内单位划归为两大类：教学执行部门和教学服务部门．教学服务部门是我校非教学单位的统称，它们的中心工作是为教学服务．学校划拨给二级单位适度的日常经费，是他们顺利开展工作的保障，过少的经费将影响工作的正常运行，过多的经费又无疑不优化．但是，目前对这方面的研究尤其是定量的研究相对滞后，如何确立更为科学、合理的分配方案，找到适度的经费分配点是必要的，也是必须的．基于此，本文首先对教学服务部门日常经费的分配做一些初步的探索．

1.2 国内外研究现状

在现有文献中，有少量的一些关于经费分配模型的研究．文[12]对高校经费使用的结构化进行探索，引入教育经费使用的约束条件和目标函数，建立了经费分配模型．该文献在建立模型所引入的约束条件没有充分考虑现实中资金分配的因素，这样建立的模型稳定性不是很好．文[11]以保证重点任务项目，不突破总的指标控制等因子建立了多目标线性规划模型，但经费分配模型的建立没有考虑各单位经费的相对平衡．

在调研的几所高校中，他们现在对教学服务部门的日常经费分配大致实行三种分配模式．第一种是用部门的人员人数乘以每人应得的经费加上一个调和经费．如果某部门的人数没

有达到规定的编制人数，就要以缺编的人数每人补给一定的经费；第二种是根据经验用一个项目定额标准去乘岗位职工编制数和相应的岗位系数，然后把所有的项目经费相加就得到一个部门的经费的分配；第三种是对服务部门按零基预算方法进行分配，而这里的零基预算要兼顾压缩、节约的原则．对于服务部门的经费分配在这里只分配了办公经费，剩余的分配经费在财务处集中管理，各个行政部门所需要其他的经费必须向财务处申报，而在这里申报的时候必须细致到每个项目上去．

总的来说，对于高校教学服务部门的资金分配目前还没有很完整的分配方案，各单位尤其各高校的具体分配差距比较大．本文在已有的文献查新和实地调研的基础上，确立以包干不补的原则，按块分配的办法进行分配，建立一个与经费分配因子密切相关且能量化经费分配因子的日常经费分配模型．

1.3 本文研究的目的和研究内容

现行高校教学服务部门经费分配方案相当不一致，缺乏一定的科学指导和管理，使复杂的经费分配带有较大程度的随意性．这样的分配也会失去一定的公平，将导致有的部门由于经费不足而影响工作效率，不能及时完成任务．有的部门由于分配经费过多，造成浪费、造成流失．因此，需要建立一个与经费分配因子紧密相关，较为合理的经费分配模型，使各个部门的经费分配也达到一个平衡，让整个经费分配对教学服务部门的工作起到一个良好的促进作用．

本文研究的主要内容是高校教学服务部门日常经费的分配．教学服务部门日常开支经费主要包括：办公费、差旅费、电话费、邮资费、招待费、会议费等．具体思路如下：

首先，我们利用各个影响经费分配的因子在整个经费分配中所占相应的权重乘以待分配经费总额，得到分配在各个因子上的总经费，即所有教学服务部门在该影响因子上应分配的经费总和．

其次，将各教学服务部门的相应影响因子进行量化，用各部门影响因子的量化值分别除以所有部门在该影响因子的量化值总和，从而得到各部门在该影响因子上应分配到的经费数占该影响因子上分配得到的总经费数额的权重．然后用相应的权重乘以其总经费，得到各部门在该影响因子上的分配经费，最后将该部门的各影响因子分配到的经费进行累加，即为该部门应分配到的日常经费．

对于影响因子在经费分配中所占的权重的确定，我们利用了和法计算各个影响经费分配的因子构成的成对比较矩阵，得到了各个影响经费分配的因子在整个经费分配中所占的权重，并进行一致性检验．最后，把此模型应用到我校教学服务部门日常经费的分配中，并利用 MATLAB 平台开发了相应的软件．

这种分配办法有利于减少学校对各个部门要做哪些具体工作的考察工作量，在包干不补的原则下，能有效确保各个部门理清家底，量力而行．在经费使用方面，财权下放各个教学服务部门，有利于各部门根据自身实际，做到自我约束、自我控制、自我发展，合理安排各项经费的有效使用．

2 经费分配模型的建立

现行高校教学服务部门经费分配方案相当不一致，缺乏一定的科学性，复杂的经费分配带有较大程度的随意性．为了使经费统筹安排，有限的经费得到合理的充分利用，在历史惯例的

基础上，以兼顾平衡、包干不补的原则，将经费按块块分配的办法划拨给每个部门．即依据经费分配的影响因子确定各教学服务部门经费分配数额，各个部门在每个因子上的经费分配数额获得后，再将之进行累加得到各个部门的分配经费．

首先假设要分配到教学服务部门的总经费为 T（T 是除了预留以外的经费），影响经费分配的因子集 $C=\{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$，影响经费分配的因子在整个经费分配中所占的权重集 $W=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m\}$．对影响因子权重的要求是

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i=1, \qquad 1\leqslant\omega_i\leqslant 0 \quad (i=1,\cdots,m) \tag{1}$$

则分配在影响因子 C_i 上的总经费为 $T\omega_i$，即所有教学服务部门在影响因子 C_i 上得到的经费总和．设第 j 个教学服务部门的影响因子 C_i 的量化值为 q_{ij}，则 $\sum_{j=1}^{n}q_{ij}$ 是所有服务部门的影响因子 C_i 的量化值的总和．用

$$\left.\begin{aligned} E_j&=\frac{q_{ij}}{\sum_{j=1}^{n}q_{ij}} \\ \sum_{j=1}^{n}E_j&=1 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

可得到第 j 个教学服务部门在影响因子 C_i 上分配得到的经费数占所有教学服务部门在影响因子 C_i 上分配得到的经费数的比例，然后就得到第 j 个教学服务部门在影响因子 C_i 上分配得到的经费数为

$$S_{ij}=\frac{q_{ij}}{\sum_{j=1}^{n}q_{ij}}T\omega_i \tag{3}$$

设第 j 个教学服务部门在所有因子上分配得到的经费数为 S_j，则

$$S_j=\sum_{i=1}^{m}\frac{q_{ij}}{\sum_{j=1}^{n}q_{ij}}T\omega_i \tag{4}$$

即为第 j 个服务部门分配得到的经费数．

上述几个公式中，q_{ij} 是第 j 个服务部门的影响因子 C_i 的量化值，T 是要分配的经费（除了预留以外的经费），ω_i 是影响因子 C_i 在整个经费分配中所占的权重，S_j 是第 j 个服务部门分配得到的经费数．

3　影响经费分配因子权重的确定

3.1　成对比较矩阵的确定

如何合理地确定各影响因子对应的权重既重要，又相对复杂．在实际应用中，当影响因子

较多时，对所有影响因子的重要程度全部作出正确判断比较困难，但对两两影响因子之间的重要程度进行比较，却比较容易．因此，我们按照 A.L.Saaty 等人提出的 analyticil hierarchy process 的 1～9 尺度进行量化，尺度 a_{ij} 的取值范围是 1，2，…，9 及其互反数 1，1/2，…，1/9，并构建成对比较矩阵，然后利用和法确定各影响因素对经费分配的权重．人们头脑中通常有 5 种明显的等级，用 1～9 尺度可以方便地表示如表 1 所示．

表 1　1～9 尺度 a_{ij} 的含义

尺度 a_{ij}	含　　义
1	c_i 与 c_j 的影响相同
3	c_i 比 c_j 的影响稍强
5	c_i 比 c_j 的影响强
7	c_i 比 c_j 的影响明显的强
9	c_i 比 c_j 的影响绝对的强
2，4，6，8	c_i 与 c_j 的影响之比在上述两个相邻等级之间
1，1/2，…，1/9	c_i 与 c_j 的影响之比为上面 a_{ij} 的互反数

设经费分配中影响因子 C_i 相对影响因子 C_j 的判断数为 a_{ij}，其元素 a_{ij} 组成的 $m\times m$ 方阵称为经费分配影响因子的成对比较矩阵，即

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \tag{5}$$

按照尺度 a_{ij} 的定义，得

$$a_{ii}=1, \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{6}$$

$$a_{ij}=\frac{1}{a_{ji}}, \quad (i,j=1,2,\cdots,m) \tag{7}$$

3.2　和法的步骤

和法计算步骤如下：

（1）将矩阵 A 的每一列向量归一化，得

$$\varpi_{ij}=\frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}a_{ij}}, \quad (i,j=1,2,\cdots,m) \tag{8}$$

（2）对 ϖ_{ij} 按行求和，得

$$\varpi_i=\sum_{j=1}^{m}\varpi_{ij}, \quad (i,j=1,2,\cdots,m) \tag{9}$$

（3）将 ϖ_i 归一化，就可以得到各个影响因子对经费分配的权重

$$\varpi_i = \frac{\varpi_i}{\sum_{i=1}^{m} \varpi_i}, \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{10}$$

记影响因子的权重向量 $W = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)$.

（4）最大特征根为

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{(AW)_i}{\omega_i} \tag{11}$$

3.3 一致性检验

以上得到的特征向量即为所求权数，那么权数的分配是否合理？这需要对成对比较矩阵进行一致性检验，其公式是

$$\mathrm{CR} = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{RI}} \tag{12}$$

式中，CR 称为一致性比率，CI 称为一致性指标，其公式是

$$\mathrm{CI} = \frac{1}{n-1}(\lambda_{\max} - n) \tag{13}$$

RI 称为随机一致性指标，对于 1～9 阶成对比较矩阵，RI 值如表 2 所示.

表 2 随机一致性指标 RI 的数值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

当 CR < 0.1 时，即认为成对比较矩阵具有满意的一致性，说明权数分配是合理的；否则，就需要调整成对比较矩阵，直到取得具有满意的一致性为止.

4 模型的应用及结果分析

4.1 模型的应用

现以我校为例，假设教学服务部门日常经费分配总额为 100 万元，共有 35 个服务部门参与经费分配. 在本实例计算中，影响服务部门经费分配的因子很多，针对我们学校的实际情况，现主要考虑各个服务部门的科员人数（C_1）、科级人数（C_2）、处级助理人数（C_3）、副处级人数（C_4）、正处级人数（C_5）、校级人数（C_6）、出差次数（C_7）、接待次数（C_8）、会议次数（C_9）等 6 个人员职级因子和 3 个主要经费支出因子，影响服务部门日常经费分配的因子结构图（见图 1）.

从因子科员人数、科级人数、处级助理人数的多少可以反映教学服务部门规模的大小，从校级人数、正处级人数、副处级人数的多少可以反映教学服务部门的重要性，而不同的教学服务部门在三个主要经费支出因子上的经费支出差异额较大. 对于成对比较矩阵的建构，我们按

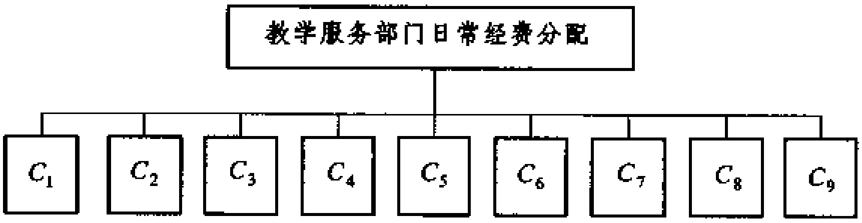


图 1　影响服务部门日常经费分配的因子结构图

照前面的思路，在咨询专家的基础上，得到矩阵：

$$
A=\begin{pmatrix}
1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 4\\
\frac{1}{3} & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 2\\
\frac{1}{3} & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 2\\
\frac{1}{2} & 3 & 3 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & 2 & 2 & 3\\
\frac{1}{2} & 3 & 3 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 2 & 2 & 3\\
1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 & 4\\
\frac{1}{3} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 2\\
\frac{1}{3} & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 2\\
\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1
\end{pmatrix}
$$

由程序 1，按照和法求解成对比较矩阵及检验的步骤（8），（9），（10），计算可得影响因子的权重如表 3 所示．

表 3　各个因子对于经费分配的权重

科员人数	科级人数	处级助理人数	副处级人数	正处级人数	校级人数	出差次数	接待次数	会议次数
0.208 6	0.064 0	0.064 0	0.132 6	0.132 6	0.220 9	0.068 4	0.068 4	0.040 6

最大特征根为

$$\lambda_{\max}=9.1351$$

一致性指标为

$$\mathrm{CI}=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}=\frac{9.1351-9}{9-1}=0.0169$$

一致性比率为

$$\mathrm{CR}=\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{RI}}=\frac{0.0169}{1.45}=0.0128<0.1$$

这里的 CR < 0.1，认为成对比较矩阵具有满意的一致性，说明权数分配是合理的．

在对出差次数、接待次数、会议次数进行量化时，我们是采取学校各个服务部门前三年的出差次数、接待次数、会议次数的平均数．对各影响经费分配的因子进行量化如下（以下是假设数据）（见表 4）．

表4　各个因子量化值

因子 q_{ij} 部门	科员人数	科级人数	处级助理人数	副处级人数	正处级人数	校级人数	出差次数	接待次数	会议次数
学生工作部	3	2	1	1	1	0	8	7	34
就业办公室	4	1	0	1	0	0	18	20	23
招生办公室	6	1	1	1	0	0	25	12	19
团　委	3	1	1	1	0	0	7	3	11
工　会	5	1	1	1	0	0	3	4	4
统战部	3	1	0	1	1	0	7	12	39
宣传部	3	1	0	1	1	0	9	17	23
校长办公室	1	1	1	0	0	5	67	43	78
发展规划处	2	1	0	1	1	0	11	12	13
体系运行办公室	3	1	1	0	0	0	2	11	9
国际与交流处	2	1	0	0	1	0	15	9	3
组织部	3	1	1	1	1	0	10	11	21
离退休工作部	2	1	1	0	0	0	2	2	3
人事处	5	2	1	1	1	0	14	9	41
计划财务处	8	4	2	1	1	0	7	6	23
资产管理处	4	1	0	0	1	0	5	9	25
采购中心	3	1	1	1	1	0	19	4	36
纪委办公室	3	2	1	1	1	0	4	9	27
检察处	5	3	1	1	0	0	2	7	21
审计处	3	1	0	0	0	0	1	5	12
保卫处	3	1	0	0	0	0	1	1	6
管理办公室	3	1	1	1	0	0	11	3	6
运营办公室	4	1	1	1	0	0	2	3	5
服务办公室	3	1	1	1	0	0	4	4	7
教务处	10	3	2	1	0	0	11	21	11
评建办	6	1	1	1	0	0	13	14	13
教学督导办	4	1	1	1	0	0	10	9	9
党委教学部	3	1	1	1	0	0	12	7	9
科研处	4	1	1	1	0	0	13	7	6
图书管	7	1	1	1	0	0	2	2	2
报刊编辑部	5	1	1	0	0	0	2	3	1
学科建设办公室	3	1	1	1	0	0	4	5	6
基建办公室	3	1	1	1	0	0	6	7	14
健康办公室	7	1	1	0	0	0	1	1	1
后勤服务办公室	6	1	0	1	0	0	2	1	3
总　和	142	45	28	26	11	5	330	300	564

根据（4）式由程序 2 计算可得到各个部门的分配经费如表 5 所示.

表 5　各个部门的分配经费数（单位：万元）

部门	学生工作部	就业办公室	招生办公室	团委	工会	统战部	宣传部
经费	3.2	2.2	2.7	1.6	1.8	3	3.1
部门	校长办公室	发展规划处	体系运行办公室	国际与交流处	组织部	离退休工作部	人事处
经费	25.4	2.8	1.2	2.2	3.2	0.8	3.8
部门	计划财务处	资产管理处	采购中心	纪委办公室	检察处	审计处	保卫处
经费	4.4	2.5	3.3	3.2	2.2	0.8	0.7
部门	管理办公室	运营办公室	服务办公室	教务处	评建办	教学督导办	党委教学部
经费	1.7	1.6	1.5	3.6	2.4	1.9	1.8
部门	科研处	图书管	报刊编辑部	学科建设办公室	基建办公室	健康办公室	后勤服务办公室
经费	1.9	2	1.2	1.6	1.7	1.4	1.6

4.2 结果分析

从表 5 计算经费分配的结果，可以看出教学服务部门分配经费时明显趋向有校级领导、正处级、副处级领导以及出差次数、招待次数、会议次数多的部门，这符合学校重要教学服务部门发展的要求．本文提出的方法，兼顾了平衡、发展以及经费的有效利用，有较强的适应性和可操作性．经费分配中考虑的影响因子，由各服务部门依据自身的实际情况取舍．两两影响因子重要程度信息可根据学校的情况，由专家与财务处专业人员论证后给出．当财政年度的经费分配总量变化时，能容易做出相应的调整，给出一个适合的经费分配的方案.

5 结　论

5.1 主要结论

本文遵循兼顾平衡、发展以及经费的有效利用原则，将层次分析理论运用于教学服务部门的日常经费分配中，得到了教学服务部门日常经费分配模型．该模型有利于经费分配的量化，大大减少了经费分配的随意性；同时，我们自主开发的财务分配软件，将使财务人员从繁杂重复的数值计算中摆脱出来，把这些工作交由计算机来做，有利于工作效率的提高，有利于办公现代化.

5.2 后续研究工作的展望

模型中影响因子的取舍及两两影响因子间重要程度的取值不同，会对计算结果有一定程度的影响，影响因子权向量的确定是依赖人们的主观成对比较，与各个部门的实际情况有关，也与专家的偏好有关. 因此，在以后的工作中，需将影响经费分配的因子再做深入的研究和挖掘；成对比较矩阵的建立，权重系数的确定比较关键，需要充分论证.

参 考 文 献

[1] 刘健. 在多目标决策中利用基点计算权重[J]. 系统工程理论与实践，2001，4（4）：28～30

[2] 胡水华. 高等学校院系办学经费分配模式的探讨[J]. 佳木斯工学报，1996，14（2）：161～163

[3] 郑尧华，吴晓平，郭福亮. 训练保障系统经费分配模型研究[J]. Joural Of Naval Academy Of Engineering，1999，88（2）：103～106

[4] 欧鸿，韩文秀. 基金委重点项目经费分配系统的设计与实现[J]. 决策与决策支持系统，1995，5（4）：65～68

[5] 贾银锁，杨博. 多层加权模糊预算方法及其在教育资金分配中的应用[J]. 西北民族大学学报，2003，24（51）：10～13

[6] 郭新立. 基于评价的大学拨款模型及其应用[J]. 高等工程教育研究，2004，3（2）：30～32

[7] 简炜，张友兵，吴阳，钱积新. 基于爬山法和遗传算法的联合搜索算法[J]. 湖北汽车工业学院学报，2004，18（2）：48～49

[8] 杜纲，顾培亮. 资源分配问题的层次激励模型[J]. 管理工程学报，1997，11（2）：90～94

[9] 刘瀛州，赵运良. 一种可用于资金分配的线性规划模型[J]. 运筹与管理，2000，9（4）：72～74

[10] 蒋伟进，孙星明. 基于混合遗传算法的经费分配多目标规划研究[J]. 仪器仪表学报，2005，26（6）：613～617

[11] 魏平，王玉婷，况丽霞. 试论高校设备经费分配模型与求解[J]. 实验室研究与探索，2002，21（5）：130～132

[12] 刘松. 高校资金使用结构及其优化设计模型[J]. 沈阳工业大学学报，1995，17（2）：75～77

[13] 罗小明，孙燕辉. SATSRP 经费分配模型及其软件结构设计[J]. 指挥技术学院学报，1997，8（2）：38～41

[14] 马君儿，李东明. 资金的最优分配[J]. 工程数学，2002，18（5）：67～70

[15] 唐强. 资金预算问题建模方法研究[J]. 中南民族学院学报，2001，20（4）：48～49

[16] 姜启源. 数学模型[M]. 北京：高等教育出版社，2003

[17] C. W. Clark. *Mathematical bioeconomics*[M]. New York：Wiley Interscience，1976

高校教学执行部门办学经费分配模型

谭周洪

【摘　要】本文结合高校的实际情况，按照高校教学执行部门办学经费使用性质对教学执行部门办学经费分为 14 类．运用因素分配，采用当量计算方法预算各教学执行部门办学所需经费，确定出下年度用于教学执行部门办学经费总额．在确保教学执行部门划拨的经费在预算范围正常波动和总的分配不超支的情况下，建立了以效益最佳为目标函数的优化模型，通过模型的计算获得各教学执行部门划拨的金额．同时，我们自主开发的财务分配软件，使财务人员从繁杂重复的数值计算中摆脱出来，实现了财务分配办公现代化．

【关键词】办学经费　数学模型　优化模型

1　引　言

1.1　问题的提出及研究意义

我校在引入 ISO9001 质量管理体系、ISO14001 环境管理体系和 GB/T28001 职业健康安全管理体系，创建并实施“三标一体”教育质量模型过程中，确立了“教育即服务，学生即顾客，质量即生命”的办学理念，将校内单位划归为两大类：教学执行部门和教学服务部门．教学执行部门是我校教学单位的统称．

随着我国加入 WTO，高校逐步融入了开放的世界大市场．高校作为精神生产领域的教育部门，虽然不像企业那样直接从事物质资料等有形产品的生产和销售，但同样存在投入与产出的经济活动，也存在着如何有效地利用现有的办学经费提高教学质量和办学效益问题．因此，高校对教学执行部门办学经费分配时，在基本保证各教学执行部门的日常办学经费需求下，须思考怎样分配有限的办学经费使所获得的办学效益最佳．

1.2　国内外研究现状

目前，国内外高校在分配教学执行部门办学经费时，大多采用块块分配法，即：学校财务部门按财政预算项目进行预算，各项目预算经费分配到相关职能部门，再由这些职能部门按一定方式把各项目预算经费的大部分分配到教学执行部门，剩余部分留作宏观调控．有少数高校在分配教学执行部门办学经费时，采用学生分配法，即由学校财务部门按教学执行部门在校生人数分配教学执行部门办学经费．还有部分高校根据教师人数和学生人数来给各教学执行部门划拨办学经费．按各教学执行部门（教师人数×折算系数＋学生人数×折算系数）×标准的原

则划拨给各教学执行部门，对不足全校平均人数 1/4 的教学执行部门给一定补贴．对其他实验差异、学科差异实行项目补助来平衡．另外还有的高校直接按学费收入的 30%作为学生教学经费(含课时费、津贴)，其他需求按项目实行集中管理．

1.3 本文研究的目的和研究内容

总的来说，对于高校教学执行部门的办学经费分配问题，目前还没有形成比较完整的方案，各高校的具体分配差距比较大．本文在已有的文献查新和实地调研的基础上，对高校教学执行部门办学经费分配问题做一些初步的探讨．首先按照各教学执行部门经费使用性质对教学执行部门办学经费分类，运用因素分配法，即以学生人数、职工编制数、完成的教学和科研工作量、学科性质等为主要因素，兼顾平衡原则，采用当量计算方法，预算出各教学执行部门办学所需经费．再按照预算结果确定出该年度的办学经费，由各教学执行部门在外服务收入、就业率、获奖、考研人数、学生论文发表数等产生的效益不同，最后在保证各教学执行部门所分得的办学经费在正常波动范围之内和实际分配总额不超支的前提下，使划拨的经费产生的效益最佳．

2 教学执行部门办学经费的构成

从高校教学执行部门情况来看，教学执行部门办学经费主要用于校内工资中的岗位津贴、业绩津贴；公务费用中的办公费、党建费、水电费；教学费用中的教学实习、教学差旅、教学资料、教学实验、设备维修、学科课程补助、业务费；学生费用主要是学生活动费．根据以上使用性质可将教学执行部门办学经费分为 14 项，如表 1 所示．

表 1 教学执行部门办学经费的分类

校内工资	岗位津贴 m_{i1}
	业绩津贴 m_{i2}
公务费用	办公费 m_{i3}
	党建费 m_{i4}
	办公室水电费 m_{i5}
	实验室水电费 m_{i6}
教学费用	教学差旅费 m_{i7}
	教学资料费 m_{i8}
	教学实验费 m_{i9}
	设备维修费 m_{i10}
	学科课程补助费 m_{i11}
	教学实习费 m_{i12}
	业务费 m_{i13}
学生费用	学生活动费 m_{i14}

3 教学执行部门办学成本核算

3.1 校内工资

3.1.1 业绩津贴

依据各教学执行部门所承担的计划工作量 w_i，由学校规定的教职工单位工作量津贴标准 c，计划分配给教学执行部门 i 的业绩津贴为

$$m_{i1}=c\times w_i \tag{1}$$

3.1.2 岗位津贴

岗位津贴划拨主要原则是以岗定薪.因此，可设全校各教学执行部门共有 m 个不同的岗位，学校对各岗位的津贴标准为 $d=(d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_m)$. 再设第 i 教学执行部门各岗位的人数分别为 $g_{i1},\ g_{i2},\ \cdots,\ g_{im}$，则计划分配给教学执行部门 i 的岗位津贴为

$$m_{i2}=\sum_{t=1}^{m}g_{it}\times d_t \tag{2}$$

3.2 公务费用

3.2.1 办公费

办公费的划拨主要是根据教职工人数. 因此，可设第 i 教学执行部门共有 n_i 名教职工，其中学校对各教学执行部门每人的平均办公费标准为常数 b，从而分配给教学执行部门 i 的办公费为

$$m_{i3}=b\times n_i \tag{3}$$

3.2.2 党建费

由于党建费主要是用于党的建设、宣传、学生党校培训等. 因此，党建费由教职工党员数和本专科学生人数来划拨. 设第 i 教学执行部门教职工党员数 r_i，本专科生数 x_i，教职工党员相对于本专科学生的折算系数为 f_1，规定的人均党建费为 l_1，从而计划划拨给教学执行部门 i 的党建费为

$$m_{i4}=l_1(r_i\times f_1+x_i) \tag{4}$$

3.2.3 办公室水电费

办公室水电费是由各教学执行部门教职工人数 n_i 决定的. 因此，设学校划拨教学执行部门办公室水电费人均标准为 y，从而计划划拨给教学执行部门 i 的办公室水电费为

$$m_{i5}=n_i\times y \tag{5}$$

3.2.4 实验室水电费

实验室水电费是根据各教学执行部门完成各自实验教学任务所消耗的水电支出. 因此，应该依据各教学执行部门该学年所承担的实验课时数和实验强度来划拨. 由各教学执行部门的实验室教学任务确定各教学执行部门实验课时数，计算出实验人次数 s_i，则学校由各教学执行部

门的实验强度制定出各教学执行部门每人每次实验水电费消耗标准为 $t=(t_1, t_2,\cdots, t_n)$. 从而可得出计划划拨给教学执行部门 i 的实验室水电费为

$$m_{i6}=s_i\times t_i \tag{6}$$

3.3 教学费用

3.3.1 教学差旅费

教学差旅费用于教师为保障教学质量和教学发生的各项事件等的差旅和会议费. 因此，计算这项费用的划拨方案应该根据教职工人数和学生人数来进行. 设学校教学执行部门教职工相对于本专科学生的折算系数为 f_2，其中第 i 教学执行部门教职工人数 n_i，本专科生数 x_i，规定的人均教学差旅费为 l_2，从而计划划拨给教学执行部门 i 的教学差旅费为

$$m_{i7}=l_2\times(n_i\times f_2+x_i) \tag{7}$$

3.3.2 教学资料费

教学资料费用于教学资料建设. 因此，划拨时应该根据各教学执行部门的教职工人数和本专科学生人数来制定. 假设学校教学执行部门教职工相对于本专科学生的折算系数为 f_3，其中第 i 教学执行部门教职工人数 n_i，本专科生数 x_i，规定的人均教学资料费为变量 l_3，从而计划划拨给教学执行部门 i 的教学资料费为

$$m_{i8}=l_3\times(n_i\times f_3+x_i) \tag{8}$$

3.3.3 教学实验费

根据各教学执行部门开设实验课时数，计算出各教学执行部门的实验人次数 s_i，则学校由各教学执行部门的实验强度制定出各教学执行部门每人每次实验消耗材料的标准为 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$，从而可得出计划划拨给教学执行部门 i 的教学实验费为

$$m_{i9}=s_i\times z_i \tag{9}$$

3.3.4 设备维修费

设备维修费用于教学设备的维修和改造. 由于各教学执行部门的实验人次数 s_i和各实验室设备不同，因此划拨这项费用时可以考虑各教学执行部门实验人次数和平均消耗费. 学校由各教学执行部门的实验强度制定出各教学执行部门每人每次实验设备维修的标准为 $a=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，从而可得出计划划拨给教学执行部门 i 的设备维修费为

$$m_{i10}=s_i\times a_i \tag{10}$$

3.3.5 学科课程补助费

根据各教学执行部门所开设的学科课程数和各学科课程重点程度来划拨学科课程补助. 假定全校学科课程共分为国家级精品（重点）课程、市级精品（重点）课程、校级精品（重点）课程、一般课程 4 级. 假定第 i 教学执行部门开设第 k 级课程数为 $p_i=(p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4})$. 则由学校规定的各级学科课程补助的标准为 $q_k=(q_1, q_2, q_3, q_4)$，可得出计划划拨给教学执行部门 i 的学科课程补助费为

$$m_{i11}=p_{ik}\times q_k \tag{11}$$

3.3.6 教学实习费

根据各教学执行部门学生人数 x_i，由学校制定的每人教学实习标准 f_4，可得出计划划拨给教学执行部门 i 的教学实习费为

$$m_{i12}=f_4\times x_i \tag{12}$$

3.3.7 业务费

根据各教学执行部门学生人数 x_i，由学校制定的每生标准 f_5，可计算出需要划拨给教学执行部门 i 的业务费为

$$m_{i13}=f_5\times x_i \tag{13}$$

3.4 学生活动费

根据各教学执行部门学生人数 x_i，由学校制定的每人活动经费标准 f_6，可得出计划划拨给教学执行部门 i 的学生活动费为

$$m_{i14}=f_6\times x_i \tag{14}$$

3.5 教学执行部门办学经费

第 i 教学执行部门办学预算所需经费为

$$m_i=\sum_{j=1}^{14}m_{ij} \tag{15}$$

预算得到学校所有教学执行部门（假设 n 个）需要总的办学经费为

$$m=\sum_{i=1}^{n}m_i \tag{16}$$

4 经费分配模型

在学校所有教学执行部门预算所需总的办学经费 m 的基础上，根据用于教学执行部门的经费高于或等于预算所需经费的原则，确定出全校下学年用于所有教学执行部门经费总额 T. 在保证各教学执行部门的日常办学经费基础上，再用对外服务收入、就业率、获奖、考研人数、学生论文发表数等作效益因素，考虑效益好的教学执行部门分配经费适当上浮，效益差的分配经费适当下跌，使总体分配效果最佳.

4.1 教学执行部门效益的确定

设各教学执行部门对外服务收入 $\beta=(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_{14})$；就业率 $\delta=(\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots,\ \delta_{14})$；本科生考取研究生比例 $e=(e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_{14})$；获得校级以上奖人次数 $\gamma=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_{14})$；学生论文发表折合篇数 $\eta=(\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_{14})$. 假定对外服务收入产生的效益值为 $\dfrac{\beta_i}{m_i}\times\varepsilon_1$，就业率比例 δ_i 的效益值为 $\delta_i\times\delta_2$，本科生考取研究生比例 e_i 的效益值为 $e_i\times\varepsilon_3$，每人获得一次校级以上奖

产生的社会效益为ε_4，学生论文发表篇数η_i的效益值为$\frac{\eta_i}{x_i}\times\varepsilon_5$，从而可计算出 i 教学执行部门的效益值

$$u_i=\frac{\beta_i}{m_i}\times\varepsilon_1+\delta_i\times\varepsilon_2+e_i\times\varepsilon_3+\frac{\gamma_i}{x_i}\times\varepsilon_4+\frac{\eta_i}{x_i}\times\varepsilon_5 \tag{17}$$

4.2 教学执行部门办学经费分配的数学模型

设学校用于所有教学执行部门办学经费总额为 T，涉及 n 个教学执行部门分配，m_i为 i 教学执行部门预算所需经费，u_i为 i 教学执行部门的预测效益值，y_i为实际分配给 i 教学执行部门的经费数．定义如下函数

$$\overline{u}_i=\frac{y_i-m_i}{m_i}\times u_i \tag{18}$$

根据预算，在实际分配总额不超支的前提下，给各教学服务部门预算经费附以波动系数（设波动系数α在 0～0.1 之间取值），使划拨的经费产生的效益最大．因此可按分配经费获得的效益最大，建立优化模型

$$\max E=\sum_{i=1}^{n}\overline{u}_i \tag{19}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\leqslant T\\(1-\alpha)\times m_i\leqslant y_i\leqslant(1+\alpha)\times m_i\\0\leqslant\alpha\leqslant 0.1\end{cases} \tag{20}$$

5 模型的应用

5.1 教学执行部门办学经费预算

以我校为例进行预算．我校共有文学与传媒系、数学与计算机科学系、外国语系等 14 个教学执行部门，各教学执行部门的学生人数、教职工人数、计划工作量、教职工党员数假定如表 2 所示．

表 2　各教学执行部门基本情况

教学执行部门名称	学生人数	教职工人数	计划工作量	教职工党员数
文学与传媒系	1 138	56	6 828	18
数学与计算机科学系	1 400	82	8 400	22
外国语系	1 432	68	8 592	17
化学与环境科学系	608	30	3 648	8
生命科学系	800	37	4 800	10
法律与政治系	600	30	3 600	9

续表 2

教学执行部门名称	学生人数	教职工人数	计划工作量	教职工党员数
经济与管理系	710	36	4 260	9
物理与信息工程系	760	37	4 560	9
体育系	1 030	49	6 180	12
音乐系	810	39	4 860	10
陈子庄美术学院	1 067	40	6 402	10
教育科学系	650	32	3 900	8
基础学院	2 000	60	12 000	16
应用技术学院	1 600	33	9 600	9

假定一：各教学执行部门所有设备已按本科水平建设配置齐全.

假定二：学校依据近三年情况，确定出教学执行部门教职工每人的平均办公费 b 标准为 600 元/年. 折算系数 f_1 为 16，f_2，f_5 为 12，f_3 为 14，f_4 为 25 元/年，f_6 为 20 元/年. l_2 为 10 元，l_1 为 5 元，l_3 为 8 元，c 为 60 元，y 为 300 元/年.

s_i = (2 276，2 800，2 864，1 216，1 600，1 200，1 420，1 520，2 060，
1 620，2 134，1 300，4 000，3 200);

t_i = (1，3，2，5，1，2，1，4，2，2，1，2，2，4);

z_i = (1，3，1，4，2，1，1，5，3，2，5，2，2，4);

q_k = (4 000，3 000，2 000，1 000);

a_i = (1，3，4，1，1，1，1，4，5，3，4，2，3，4).

假定三：各教学执行部门学科及课程假定如表 3 所示.

表 3 各教学执行部门学科课程

教学执行部门名称	国家级重点课程	重庆市级重点课程	校级重点课程	一般课程
文学与传媒系	0	2	7	46
数学与计算机科学系	0	4	7	57
外国语系	0	5	8	56
化学与环境科学系	0	2	4	24
生命科学系	0	3	4	33
法律与政治系	0	1	5	24
经济与管理系	0	2	4	29
物理与信息工程系	0	3	5	28
体育系	0	2	5	33
音乐系	0	1	3	36
陈子庄美术学院	0	3	14	34
教育科学系	0	2	5	25
基础学院	0	3	10	78
应用技术学院	0	2	8	63

假定四：全校各教学执行部门共有党总支书记、院长（主任）、副院长（副主任）、办公室主任、教研室主任、秘书 6 个岗位（见表 4），对每个岗位的补贴标准为

$$d_t=(10\,000,\ 9\,000,\ 8\,000,\ 7\,000,\ 6\,000,\ 5\,000)$$

表 4 各教学执行部门各岗位人数

岗位 \ 教学执行部门	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	10	11	12	6	8	6	7	7	10	8	10	6	20	16

由第 i 教学执行部门的经费需求预算公式(15)，得

$$m_i=c\times w_i=\sum_{t=1}^{m}g_{it}\times d_t+b\times n_i+l_1\times(f_1\times r_i+x_i)+y\times n_i+s_i\times t_i+l_2\times(f_2\times n_i+x_i)+$$
$$l_3\times(f_3\times n_i+x_i)+s_i\times z_i+s_i\times a_i+p_{ik}\times q_k+f_4\times x_i+f_5\times x_i+f_6\times x_i \qquad (21)$$

将以上数据代入（21）式可得

$$m_i=60\times w_i+\sum_{t=1}^{m}g_{it}\times d_t+600\times n_i+5\times(16\times r_i+x_i)+300\times n_i+10\times(12\times n_i+x_i)+$$
$$s_i\times t_i+8\times(14\times n_i+x_i)+s_i\times z_i+s_i\times a_i+p_{ik}\times q_k+25\times x_i+12\times x_i+20\times x_i \qquad (22)$$

用 EXCEL 计算（22）式可得各教学执行部门预算所需经费如表 5 所示.

表 5 教学执行部门预算所需经费

m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7
750 380	935 784	937 464	444 280	553 084	432 480	498 132
m_8	m_9	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{14}
540 764	691 228	559 688	719 900	463 664	1246 200	1 007 476

则教学执行部门办学经费预算共需要 9 780 524 元.

5.2 教学执行部门办学经费分配

假定重庆文理学院各教学执行部门上年度办学情况如表 6 所示.

表 6 各教学执行部门办学情况

教学执行部门名称	收入	就业率	考取研究生比例	校级以上奖人数	学生文章发表数
文学与传媒系	18 000	0.88	0.017	14	23
数学与计算机科学系	23 000	0.94	0.021	26	18
外国语系	21 000	0.92	0.014	25	21

续表 6

教学执行部门名称	收入	就业率	考取研究生比例	校级以上奖人数	学生文章发表数
化学与环境科学系	7 500	0.84	0.016	8	12
生命科学系	8 500	0.87	0.017	10	13
法律与政治系	7 000	0.86	0.019	11	16
经济与管理系	9 000	0.82	0.021	9	14
物理与信息工程系	15 000	0.90	0.031	12	15
体育系	17 800	0.91	0.023	13	16
音乐系	11 000	0.80	0.019	9	14
陈子庄美术学院	19 500	0.93	0.026	23	19
教育科学系	5 600	0.82	0.021	12	14
基础学院	28 500	0.93	0.019	30	34
应用技术学院	24 000	0.91	0.016	27	21

假设ε_1为 1.5，ε_2为 1，ε_3为 2，ε_4为 0.5，ε_5为 0.4. 用 EXCEL 计算出各教学执行部门产生的预测效益值 u_i如表 7 所示.

表 7　各教学执行部门预测效益值

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}
0.96	1	0.99	0.91	0.94	0.94	0.9	1	1	0.87	1	0.9	1	0.9

假定学校在以上预算的基础上，决定用于下年度的办学经费总额为 10 000 000 元. 按照效益最满意的原则，用 Lingo8.0 编程计算得（程序见程序附录）表 8.

表 8　划拨各教学执行部门办学的经费数（元）

文学与传媒系	数学与计算机科学系	外国语系	化学与环境科学系	生命科学系	法律与政治系	经济与管理系
825 418	909 014	843 717.6	488 708	608 392	475 728	547 945.2
物理与信息工程系	体育系	音乐系	陈子庄美术学院	教育科学系	基础学院	应用技术学院
594 840.4	760 350.8	615 656.8	791 890	510 030.4	1 121 580	906 728.4

5.3　结果分析

从计算得出的结果来看，各教学执行部门实际划拨的经费和预算所需经费是不完全一样的，效益好的教学执行部门分配得到的经费要比预算所需经费多，效益差的教学执行部门分配得到的经费比预算所需经费数要少. 总的来看各教学执行部门分得办学经费与预算所需金额，波动在预算基础上的±0.1 范围内，说明能够满足各教学执行部门的日常办学经费支出. 总体上体现了保证各教学执行部门办学经费在正常波动范围内，分配得到的效益值最佳，有利于经费合理高效的使用，有利于学校强势教学执行部门的经费分配倾斜，有利于提高办学质量和促

进学校可持续发展，有利于提升学校生存力和竞争力.

6 结 论

本模型以预算为依据，在保证各教学执行部门划拨的经费在预算范围正常波动和总的分配不超支的情况下，建立了以效益最佳为目标函数的数学模型，计算出来的结果也比较合乎实际办学经费分配要求．这种分配模式能够调动各教学执行部门办学的积极性，保证教学执行部门的教育质量、科研水平等．既具有一定的系统性和科学性，也具有一定的实践性和可操作性.

参 考 文 献

[1] 马静芬．高校内部分配制度存在的问题及对策[J]．成都中医药大学学报．2005，7（2）：91～92

[2] 毛建荣，蒋艳婷，张华良．构建高校学院二级理财管理体系的思考[J]、研讨与争鸣．2005，96（4）：53～55

[3] 沈思，姜渭洪、图书购置经费分配的模糊综合评判模型[J]．情报方法．2002，（9）：67～68

[4] 况丽霞，魏平，王玉婷．试论高校设备经费分配模型与求解[J]．实验室研究与探索．2002，21（5）：129～132

[5] 时光新，张衍福．模糊决策法在水利项目投资决策中的应用[J]．中国农村水利水电．1999，（22）：14～16

[6] 胡水华．高等学校院系办学经费分配模式的探讨[J]．高等工程教育研究．2003，（2）：56～67

[7] 刘铁刚，门宝辉．水利项目评价指标赋权模型的建立及其应用[J]．东北水利水电．2003，21（7）：1～3

[8] 姜启源．数学模型（第三版）[M]．北京：高等教育出版社，2003

[9] 帅宁，张志红、高等学校教育成本与投资效果分析[J]．财经漫笔．2005，12：72～73

[10] 汪泽焱，益晓新，张申如．基于理想最优方案的指标赋权法及其应用[J]．系统工程．2002，20（2）：6～9

[11] 郑尧华，吴晓平．训练保障系统经费分配模型研究[J]．海军工程学院学报．1999，88（3）：102～106

[12] 姚继军、高校内部分配制度改革中的有效激励机制设计[J]．教育与经济．2003，（4）：28～30

[13] D.Alevras，M.W.Padberg. *Linear optimization and extensions，problems and solutions*. Springer. 2001

[14] F.R.Giordano，M.DWeir and W.P.Fox. *A First course in mathematical modeling*. Brooks/Cole，2003

第三部分

“挑战杯”全国大学生课外学术科技获奖作品

酒精浓度衰退曲线的应用研究

吴朝平　高　峰　徐晓红

【摘　要】用动力系统理论研究酒精在人体内的衰退曲线及应用．针对饮酒方式的不同，将饮酒过程分成快速饮酒、某时间段内匀速饮酒和周期饮酒三种方式来讨论．并分别建立了快速饮酒、匀速饮酒以及周期饮酒三种酒精代谢的系统动力学模型．通过对实验取得的数据进行分析处理，获得各模型的相关参数，进而得到饮酒后人体内酒精浓度衰退曲线，并与实验数据进行比较，该模型吻合度良好．该组模型可以快速推算出各种情况下饮酒后人体内酒精浓度值，并科学地解释许多饮酒者在日常生活中遇到的相关疑问，从而方便人们定量估测，进行自我调控，把握饮酒后安全驾驶时机，主动预防和避免酒后驾车交通事故发生．在驾驶员理论培训和保险公司在因饮酒而造成事故的赔偿中加以应用探索，并提出解决酒后安全驾车问题的相关措施：研制手磁感应酒精测试仪等设想．

【关键词】酒精浓度　衰退曲线　应用研究

1　引　言

1.1　研究背景

目前，酒后驾车肇事已成为一种社会公害．来自世界各国紧急事故部门的报道表明：饮用酒精性饮料在交通事故、创伤、自杀和许多暴力性犯罪的发生中占重要地位，特别是道路交通事故（road traffic accidents，RTAs）至死．随着各类大马力车辆的出现和道路交通条件的改善，酒后驾驶引发的交通事故越来越多，机动车辆导致的车祸是15～25岁青年死亡的主要原因．2003年加拿大有3 162人死于交通事故，其中由饮酒所至者占33.8%，另外，18 402名受重伤的驾驶员中，18%承认事故前饮过酒．在美国，40%～50%的交通事故死亡驾驶员血液中乙醇浓度（blood alcohol concentration，BAC）超过其法律规定的范围，每30 min就有1人因酒后驾车死亡，每年大约有18 000人因此而丧命，仅2000年损失就达1 143亿美元．在我国，据公安部门统计，2003年中国交通事故死亡人数为10.4万人，居世界第一，其中有不少重大事故与酒后驾车有关，仅2003年上半年酒后驾车造成的交通事故就有5 666起，死亡1 944人；2004年1到10月份，西安市因酒后驾车等交通违法行为导致的交通事故多达741起，约占事故总数的17%．统计分析，酒后驾车发生交通事故的比例比没有喝酒的情况下高出15倍．由此看出，酒后驾车已成为我国及世界各国公共安全的一大隐患，酒后驾车的危害性已超过疲劳驾车，酒后驾车被视为公路第一杀手．

虽然《道路交通安全法》中加大了对饮酒驾车和醉酒驾车的惩罚力度，但是由于驾驶员对酒后何时才能安全驾车无把握，导致因酒后驾车引发的交通事故增多．事实上，大部分人有安全驾车意识．但是在日常生活中，真正做到拒绝"酒后"驾车有一定困难，因为每个人所从事的工作属性不同等因素，有的时候，饮点酒必不可少，并且饮酒后也不可能一直不驾车．那么，怎样使驾驶员把握饮酒度尤为重要．据调查许多驾驶员并不是想饮酒驾车：其一，他们对饮酒后究竟何时能安全驾车没有一个正确的判断和估测；其二，在知道自己多久后要开车的情况下，又对到底饮多少酒才能安全驾车也无正确判断和估测．他们只能凭感觉定性做出判断，但这不利于驾驶员安全驾车．

综上所述，非常有必要建立一个量化标准，但经文献查证，目前国内外尚无学者对此领域进行研究或探索．因此，我们拟从"以人为本"的理念出发，在"严禁酒后驾车"、"酒后驾车肇事不予赔偿"的规定和大多数人都因各种原因不得不酒后安全驾车的事实之间寻求一种合情合理又合法的新途径．通过建立人体内酒精浓度动力系统模型，根据模型获得的酒精浓度衰退曲线，从以上两方面入手进行一些有益的探索，解决相关问题，为创见和谐社会搭建一个平台，以促进我国交通安全事业的发展与完善．

1.2 研究主要内容及思路

1.2.1 模型的建立

在模型的建立中我们首先从社会习惯饮酒方式的不同（如快速、匀速以及周期性饮酒）进行考虑，由于饮酒方式的不同，人体中酒精的血浓度随时间的变化曲线也不尽相同，为解决此问题，我们分三种情况来分别建立数学模型，力求使模型的适用性和准确性更强．

1.2.2 参数的确定

参数确定准确与否，将直接影响模型的计算结果．为此我们从实验获取数据入手（将 30 个人，分成两组，分别饮不等量的相同酒精浓度的酒，分别在酒后（0.25 h，0.5 h，1 h，1.5 h，2 h，4 h，6 h，8 h，12 h 测出其此时刻人体内的酒精浓度．将测得的其中一组数据进行拟合处理，从而确定相关参数．并用另一组实测数据进行检验．

1.2.3 模型的应用研究

（1）针对驾驶员在饮酒驾车方面的疑问，解决相关问题．

（2）通过问卷调查．

在这里主要研究其相关问题的两个盲区：

① 驾驶员理论培训领域．驾驶员理论培训中，强调要培养安全意识，但怎样去培养安全意识却无具体说明．比如，我们都在宏观强调要安全驾车，拒绝酒后驾车，但这与社会实际生活有些不符．那么，他们在饮酒后何时才能安全驾车，饮酒后体内酒精含量与停驾时间量分析等问题，对培养驾驶员安全意识凸现出重要性．

② 国内现有的酒精测试仪只能测出某时刻人体内的酒精含量．我们通过分析，建立了 $C(t)-T$ 的数学模型，由测得的某时刻人体内的酒精浓度，通过模型可知等待多长时间为安全驾车．

（3）取样与肇事有时差，肇事时体内酒精浓度的推算关系研究．

当事故发生时，我们往往不能及时进行检查，而等到取样时，中间已间隔了一段时间．那么怎么由取样测得的人体内的酒精浓度倒推车辆肇事时体内的酒精浓度则尤为重要．

1.2.4 模型的推广

车保赔偿领域．保险公司对饮酒驾车而造成的事故赔偿问题上，其赔偿条例过于笼统，不应一概而论，而可以考虑以当时驾驶员体内的酒精浓度的大小为依据，划分赔偿等级．从而确定保险公司是否应该赔或罚，如果要赔或罚，以一个什么样的等级来赔或罚，以确保与交通法规中饮酒驾车处罚标准相对一致．

1.2.5 相关设想

(1) 由于平时人们饮酒的时候，对饮酒的量较为模糊，常常饮后不知道自己究竟饮了多少酒，凭感觉估计．对于此，我们建议在酒杯上加上体积刻度，便于人们计量．

(2) 应用于机动车辆上的手磁感应酒精测试仪．

1.3 研究的创新点

1.3.1 选题的创新性

本文在大量查阅相关研究的前提下，发现这些研究曲线基本上都是简单的房室模型，或直接通过简单的统计拟合进行大致的研究，未根据具体饮酒方式的不同而建立不同的数学模型．并且就模型的建立来说，他们基本上也只是建立了模型，而未给予相关参数具体求解等，仅机械式的给出一些值．更重要的是，他们基本上没有对模型的应用做研究．因此本课题很具有创新性、适用性及推广性．

1.3.2 成果的创新性

研究组通过对人们日常饮酒方式的分析，发现人们的饮酒方式主要有三种：第一，快速饮酒，以后相对较长时间不饮酒；第二，慢速饮酒（相对较长时间段），可将其视为一个匀速饮酒的过程；第三，周期性饮酒，在短时间饮了一定量的酒后，隔一段时间又饮一定量的酒．

通过对不同饮酒方式的比较和讨论，建立了一组更能反映不同饮酒方式下人体酒精浓度衰退曲线的模型，从而使得模型具有可比性和适用性，同样的，也提高了此方面研究的准确性．这是成果创新性之一．其二，解答了驾驶员朋友们常遇到的一些有关饮酒驾车方面的问题，推出的“酒后安全驾车时刻表”在驾驶员安全驾车培训中具有实际性意义．其三，成果建议应用的领域是成果创新性的另一重要方面：① 生产计量酒杯，在酒杯上标出体积刻度，一方面从感观角度讲，可以使人们对饮酒产生紧迫感；另一方面，便于人们自己计量．② 应用于机动车辆上的手持感应酒精测试仪．其主要技术指标为：手磁感应器和智能测试器．它由三部分组成：手磁感应器，发动机控制器，酒后安全驾车时刻智能测试器．

1.3.3 成果的创新性意义

(1) 模型准确性的提高，使此领域的研究更为完善．

(2) 成果应用的创新性是本研究的最具独到之处．

① 大家知道，在每年全国道路交通事故死亡人数中，相当比例是由饮酒驾车或醉酒驾车造成的．为此，国家发布了《车辆驾驶人员血液、呼气酒精含量阀值与检验》国家标准，并

给出相关处罚标准. 但为什么全国交通事故死亡人数还在逐年上升呢？究其原因，一方面是由于车辆本身的增加；另一方面则主要来自于驾驶员自身的安全意识. 但在自身安全意识的调查中我们发现这样一个问题：许多驾驶员都知道饮酒驾车和醉酒驾车的标准，但出于生活的方方面面，有些时候又不得不饮酒. 在这种无奈的情况下，他们又不知道自己饮酒后还能不能够驾车，只是凭感觉做出判断，但这种凭感觉做出的判断往往都不准确.

在调查中显示，在各地驾驶员培训内容中，几乎都未涉及此项理论知识的讲解. 如果能将此项内容融入驾驶培训的理论讲解中，我们相信，饮酒驾车的违规行为将会大大减少. 并且，希望通过我们的应用研究，将此内容纳入驾驶员培训大纲中. 这也是我们应用研究的目的之一.

② 使用计量酒杯，可以方便人们自律，从而在一定程度上可减少饮酒驾车现象.

③ 应用于机动车辆的手持感应酒精测试仪，可根本性地解决饮酒驾车问题. 它不同于一般的呼吸式酒精测试仪，它是将其安装在机动车辆方向盘上，只有驾驶员双手握住方向盘时才计量. 当车内有饮过酒的乘客时，对测量将不会产生任何影响. 因此，有可推广性，是杜绝饮酒驾车现象的有效途径之一.

2　酒精浓度衰退曲线

依据三种不同的习惯饮酒方式，从人体血液浓度变化的机理出发，分别建立人体血液中酒精浓度衰退动力系统模型，并得到相应的血浓度随时间变化的三条衰退曲线.

2.1　符号说明及模型假设

2.1.1　符号说明

x_0 —— 人体饮入酒精总量；

t —— 饮酒后的时间；

$x(t)$ —— t 时刻体液中的酒精量；

$x_1(t)$ —— t 时刻人体饮入的酒精量；

M —— 人的体重；

λ —— 人的体液占人的体重的百分含量；

μ —— 人的血液占人体重的百分含量；

k_1 —— 酒精在人体中的吸收速率常数；

k —— 酒精在人体中的消除速率常数；

$C(t)$ —— t 时刻血液中的酒精浓度；

F —— 酒精在人体中的吸收度；

V —— 人体的体液体积；

$V_{酒}$ —— 喝酒的体积；

r —— 酒的度数；

$\rho_{酒}$ —— 酒精密度；

ρ —— 人体体液密度（常值 1 g/cm^3）；

τ —— 饮酒持续时间.

2.1.2 基本假设

（1）饮酒前后，人没有摄入任何影响代谢的药物和作剧烈性运动.

（2）如果在很短时间内饮酒，认为是一次性饮入，中间的时间差不计.

（3）确定是否饮酒驾车或醉酒驾车以新的国家标准为界.

（4）不管喝的是什么酒，只以摄入的酒精总量纳入计算.

（5）酒精按一级吸收过程进入体内.

（6）正常情况下，酒精在各人体中的吸收、消除速率基本相同.

（7）将慢速饮酒看做是一个匀速过程.

（8）人体内自身的酒精浓度忽略不计.

2.2 问题分析与模型建立

酒精在人体内的代谢过程是一个复杂的过程，每个人对酒精的代谢程度是因人而异的，但都要遵循一定的变化规律. 又由于人的自身因素的差异和饮酒的方式、时间的不同，饮同样多的酒，也会有不同的效果. 因此，我们考虑了各种饮酒情况下，人体内酒精浓度与时间的函数关系，分别建立快速饮酒模型、匀速饮酒模型以及周期饮酒模型.

2.2.1 模型 1（快速饮酒模型）

（1）模型建立.

酒精是一种特殊的药物. 我们知道，酒精无需经过消化系统即可被肠胃直接吸收，进入血管. 吸收过程和代谢过程是同时进行的，在短时间内便可迅速扩散，从而达到血药浓度分布平衡. 而药物动力学模型房室模型是指给药后，药物一经进入血液循环，即均匀分布至全身. 故快速饮酒情况可通过建立一室模型求解.

虽然酒精在体内的分布状况复杂，但酒精的吸收、分解等都在系统内部进行. 酒精进入人体后，经一段时间进入血液，进入血液后，当在血液中达最高浓度时，随后开始消除. 把酒精在体内的代谢过程看为进与出的过程，这样便会使问题得到简化. 用 $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{in}}$ 和 $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{out}}$ 分别表示酒精输入速率和输出速率. 由于单位时间内血液中酒精的改变即变化率 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 就等于输入与输出速率之差，所以其动力学模型为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{in}}-\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{out}} \tag{1}$$

又因为酒精在血液中的消除速率与当时血液内的酒精浓度成正比，所以 $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{out}}=kx$，代入（1）式，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{in}}-kx \tag{2}$$

由（2）式可知 $x(t)$ 的变化规律由饮酒速率而定．而酒精在人体内的代谢可简单的由图 1 表示：

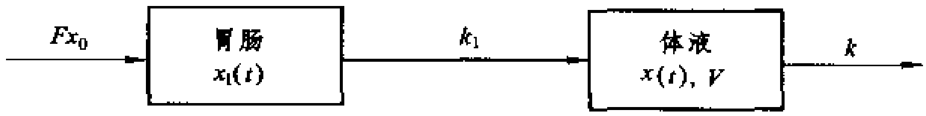


图 1

则 t 时刻吸收室的药量为 $x_1(t)$．又药物是按一级吸收过程体内的，对于胃肠有

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-k_1x_1 \tag{3}$$

对于体液有 $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{in}}=k_1x_1$．于是（2）式变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k_1x_1-kx \tag{4}$$

(3),(4) 两式构成一阶线性方程组．当 $t=0$ 时，$x_1(0)=Fx_0$，$x(0)=0$．解（2）式得 $x_1=Fx_0\,\mathrm{e}^{-k_1t}$，将其代入（4）式得一阶线性非齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=k_1Fx_0\,\mathrm{e}^{-k_1t} \tag{5}$$

由（5）式得

$$x(t)=\frac{k_1Fx_0}{k_1-k}\left(\mathrm{e}^{-kt}-\mathrm{e}^{-k_1t}\right) \tag{6}$$

从而，人体内血液中的酒精浓度为

$$C(t)=\frac{k_1Fx_0}{V(k_1-k)}\left(\mathrm{e}^{-kt}-\mathrm{e}^{-k_1t}\right) \tag{7}$$

又因为 $V=\frac{M\lambda}{\rho}$，故上式还可化为

$$C(t)=\frac{k_1Fx_0\rho}{M\lambda(k_1-k)}\left(\mathrm{e}^{-kt}-\mathrm{e}^{-k_1t}\right) \tag{8}$$

且 $x_0=rV_{酒}\,\rho_{酒}$，则人体内酒精含量与时间函数关系为

$$C(t)=\frac{k_1V_{酒}r\rho_{酒}F\rho}{M\lambda(k_1-k)}(\mathrm{e}^{-kt}-\mathrm{e}^{-k_1t})\qquad（一般情况）$$

该方程表示了人一次快速饮酒量为 x_0 后的血液中的酒精浓度是随时间 t 的变化而变化的．在这种情况下，我们来求血液中酒精含量最大值出现的时间，即求使 $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}=0$ 时，t 的值．

现对 $C(t)=\frac{k_1V_{酒}r\rho_{酒}F\rho}{M\lambda(k_1-k)}(\mathrm{e}^{-kt}-\mathrm{e}^{-k_1t})$ 求导，得

$$t_{\max}=\frac{1}{(k_1-k)}\ln\left(\frac{k_1}{k}\right) \tag{9}$$

把（9）式代入（7）式，得

$$C_{max}=\frac{k_1Fx_0}{V(k_1-k)}\left(e^{-kt_{max}}-e^{-k_1t_{max}}\right) \tag{10}$$

$$C_{max}=\frac{k_1V_{酒}r\rho_{酒}F\rho}{M\lambda(k_1-k)}\left(e^{-kt_{max}}-e^{-k_1t_{max}}\right) \tag{11}$$

由于当体内的酒精浓度达最大值时有

$$-ke^{-kt_{max}}+k_1e^{-k_1t_{max}}=0 \tag{12}$$

则（11）式可简化为

$$C_{max}=\frac{V_{酒}r\rho_{酒}F\rho}{M\lambda}e^{-kt_{max}} \tag{13}$$

（2）参数确定.

通过实测数据，根据统计学原理进行拟合，获得相关参数.

① 实验对象及实验仪器.

30 名健康男性志愿者（平均年龄 30 岁，平均体重 60.2 kg），无习惯性饮酒史，实验前三天内禁饮酒，实验期间禁止做剧烈运动. 实验仪器为：岛津 GC-16A 气相色谱仪.

② 实验方法.

（i）饮酒剂量与方式.

将 30 个人随机分成两组，分别按酒精含量为 50%的白酒 78.3 g 和 96.3 g 给予饮用. 模拟普通社会饮酒习惯. 但限其在 30 min 内饮完.

（ii）样本的收集.

分别于酒后 0.25 h，0.5 h，1 h，1.5 h，2 h，4 h，6 h，8 h，12 h 测量体内酒精浓度，测得数据（见表 1 表 3）.

表 1 饮入 78.3 g 者分时测得的数据（浓度：mg/dl，时间：h）

序号	0.25	0.5	1	1.5	2.0	4	6	8	10	12
1	54.1	82.8	103.5	103.8	97.6	68.5	47.4	32.7	22.8	15.3
2	53.5	81.4	103.0	103.1	97.0	68.1	47.0	32.3	22.1	14.8
3	52.8	82.3	101.5	100.7	96.2	67.5	46.5	32.1	21.5	14.2
4	54.0	83.2	104.8	105.2	98.0	70.1	47.8	33.6	23.8	16.4
5	53.0	80.6	101.8	100.3	96.6	67.8	46.8	31.9	20.9	14.6
6	54.2	83.3	104.2	104.9	99.1	71.0	50.0	34.8	24.2	16.6
7	53.6	82.4	102.4	103.4	98.6	68.2	46.9	32.1	22.2	13.8
8	52.5	82.1	101.2	100.5	96.8	67.5	46.3	31.8	20.6	13.5
9	54.1	84.0	104.9	105.1	99.4	79.8	49.1	34.7	24.0	15.9
10	51.9	82.1	98.6	99.9	95.6	66.7	45.7	31.4	19.8	13.4
11	54.9	84.5	105.5	105.5	99.5	70.5	51.2	34.9	24.8	16.8
12	52.8	82.2	102.5	102.7	96.3	66.8	46.6	31.9	21.4	14.2
13	64	90.3	113.2	113.5	108.5	78.6	57.9	40.8	31.6	23.5
14	50.2	79.4	96	98.6	97.8	65.2	43.3	29.7	19.8	12.2
15	46.6	75.3	92.3	93.4	88.4	59.6	39.8	23.4	15.7	9.5

由表 1 显示，测得的大部分值正常（±20 mg/dl），其中包含了三个异常值，剔除异常值，得各时刻体内酒精浓度平均值（见表 2）.

表 2

序号	0.25	0.5	1	1.5	2.0	4	6	8	10	12
平均值	53.9	82.6	103.1	103.2	97.2	68.3	47.1	32.5	22.5	15.1

表 3　饮入 96.3 g 者分时测得的数据（浓度：mg/dl，时间：h）

序号	0.25	0.5	1	1.5	2.0	4	6	8	10	12
1	66.5	101.8	126.5	126.4	119.3	84.2	58.1	40.3	27.2	19.2
2	67.1	102.3	127.5	127.0	120.2	84.5	58.6	41.2	28.0	19.5
3	66.2	100.2	125.6	126.4	118.6	83.6	57.4	39.8	27.1	20.0
4	65.3	99.8	126.0	126.5	120.0	82.9	56.9	41.5	27.8	18.7
5	68.0	102.4	128.5	128.8	121.6	85.7	59.6	40.2	26.5	19.9
6	65.8	103.5	125.1	125.5	117.8	85.9	59.5	38.4	27.4	18.7
7	65.9	100.5	126.5	124.6	118.5	82.4	56.3	38.1	25.9	19.0
8	65.2	99.6	128.3	127.5	120.3	82.1	57.4	39.5	28.3	18.5
9	67.8	104.0	129.0	129.7	118.6	83.5	58.8	40.7	29.1	17.8
10	64.9	98.7	124.8	124.9	117.7	82.3	56.9	38.3	26.6	20.4
11	64.5	98.0	125.1	126.3	118.4	82.5	57.3	38.4	27.8	21.5
12	60.5	95.6	121.6	123.8	112.5	79.1	55.2	36.0	24.8	15.6
13	72.5	98.4	125.6	130.2	120.6	88.4	64.9	51.4	35.5	25.8
14	75.1	100.5	138.3	134.2	123.5	90.7	71.5	68.9	40.8	26.8
15	59.8	89.4	100.1	99.9	95.8	81.6	58.7	49.2	25.1	15.8

由表 3 显示，测得的大部分值正常（±20 mg/dl），其中包含了四个异常值，剔除异常值，得各时刻体内酒精浓度平均值（见表 4）.

表 4

序号	0.25	0.5	1	1.5	2.0	4	6	8	10	12
平均值	66.3	101.6	126.7	126.9	119.5	84.0	58.0	40.1	27.6	19.1

将以上两组数据分别用 MATLAB 进行数据拟合，拟合曲线如图 2，图 3 所示）. 从而得出参数：$k_1 = 2.007\,5\ \mathrm{mg \cdot ml^{-1} \cdot h^{-1}}$，$k = 0.185\,5\ \mathrm{mg \cdot ml^{-1} \cdot h^{-1}}$，$F = 0.92$ 将参数代入模型计算，经检验符合度良好.

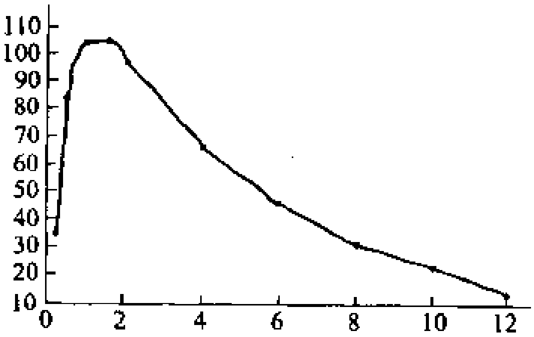


图 2

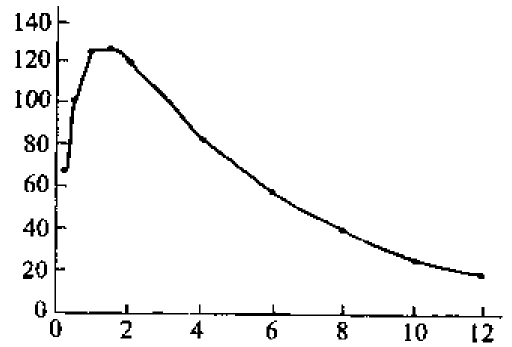


图 3

2.2.2 模型 2（匀速饮酒模型）

（1）模型概述.

酒在较长一段时间内饮入，实际上可把它看为是一个匀速饮入过程，即在时间τ内匀速涉入酒精．若体内酒精含量不超过一级消除动力学范围，假设人的酒精含量未达到平衡状态，随着人体涉入酒精量增多，血液中酒精浓度逐渐升高．当在τ时间内饮完后，由于τ时刻前一小段时间内饮入的酒精在短时间内没有被吸收，故在τ时刻后一段时间内，酒精浓度将继续升高，某一时刻将达到最大值．这一时刻后，酒精含量逐渐减小．

（2）模型建立.

一室模型的示意图如图 4 所示：

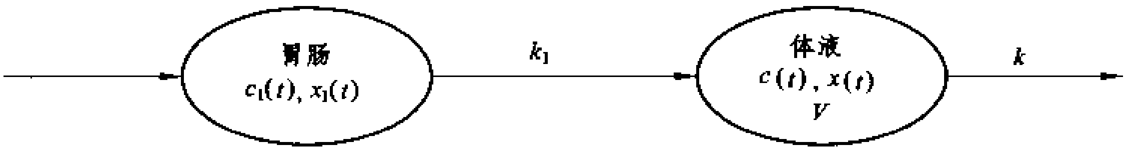


图 4

两个房室中酒精量$x_1(t)$，$x(t)$满足动力学方程．$x_1(t)$的变化率由胃肠向体液的转移$-k_1x_1$，由于我们考虑持续饮酒过程酒精进入胃肠的速度是匀速的，则酒精进入胃肠的速率为，$g(t)=\dfrac{x_0}{\tau}$ $(t\leqslant\tau)$时；又因为饮完酒后，无酒精进入胃肠，所以有$g(t)=0$ $(t>\tau)$时，故可建立动力模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=-k_1x_1+g(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k_1x_1-kx\end{cases} \tag{14}$$

式中

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{x_0}{\tau}, & 0<t\leqslant\tau\\ 0, & t>\tau\end{cases} \tag{15}$$

又因在$t=0$时胃肠中的酒精量$x_1(0)$和体液中的酒精量$x(0)$匀为零，故其初始条件为

$$x_1(0)=0,\quad x(0)=0 \tag{16}$$

联立方程（14），（15），（16），结合快速饮酒模型，得

$$\left.\begin{aligned}&x(t)=\frac{x_0\,\mathrm{e}^{-kt}}{\tau}\left(\frac{\mathrm{e}^{kt}}{k}-\frac{\mathrm{e}^{kt-k_1t}}{k-k_1}+\frac{k_1}{k(k-k_1)}\right), && 0<t\leqslant\tau\\ &x(t)=\frac{x_0(-1+\mathrm{e}^{-\tau k_1})(\mathrm{e}^{\tau k_1-kt}-\mathrm{e}^{-k_1(t-\tau)})}{\tau(k-k_1)}, && t>\tau\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

则有

$$\left.\begin{aligned} C(t) &= \frac{x_0 \mathrm{e}^{-kt}}{\tau V}\left(\frac{\mathrm{e}^{kt}}{k} - \frac{\mathrm{e}^{kt-k_1 t}}{k-k_1} + \frac{k_1}{k(k-k_1)}\right), \quad 0 < t \leqslant \tau \\ C(t) &= \frac{x_0(-1+\mathrm{e}^{-\tau k_1})(\mathrm{e}^{\tau k_1 - kt} - \mathrm{e}^{-k_1(t-\tau)})}{V\tau(k-k_1)}, \quad t > \tau \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

2.2.3　模型 3（周期饮酒模型）

（1）模型 3 的假设.

① 每次饮酒间隔时间相同.

② 每次饮酒量相同.

③ 一次饮酒在 30 min 内饮完.

（2）模型建立.

我们知道饮酒后，随时间推移，酒精在体内逐渐被吸收．前面模型的建立表明，酒精在人体内的代谢有一个较长的过程，前一时刻的饮酒量，在后一时刻饮酒时可能没有完全代谢．因此，后一时刻的体内的酒精量就应是前一时刻残留量和后一时刻饮用量之和.

设每次饮酒间隔时间为 T．当 $t=T$ 时，由一次快速饮酒模型

$$C(T) = \frac{k_1 F x_0}{V(k_1-k)}(\mathrm{e}^{-kT} - \mathrm{e}^{-k_1 T}) \tag{19}$$

得 t 时刻人体内残留的酒精量为

$$x(T) = \frac{k_1 F x_0}{k_1-k}(\mathrm{e}^{-kT} - \mathrm{e}^{-k_1 T}) \tag{20}$$

令 $B = \dfrac{k_1}{k_1-k}$，$y = \mathrm{e}^{-kT} - \mathrm{e}^{-k_1 T}$，则

$$x(T) = BFx_0 y \quad (T\text{ 时刻人体内酒精含量}) \tag{21}$$

经过时间间隔 T，又第二次饮酒，饮入量同样为 x_0，因此，当 $t=2T$ 时，人体内残留的酒精量为

$$x(2T) = B(Fx_0 + BFx_0 y)\cdot y = BFx_0(y + By^2) \tag{22}$$

当 $t=3T$ 时，

$$x(3T) = B[Fx_0 + BFx_0(y+By^2)]\cdot y = BFx_0(y + By^2 + B^2y^3) \tag{23}$$

……

当 $t=nT$ 时，

$$x(nT) = BFx_0(y + By^2 + B^2y^3 + \cdots + B^{n-1}y^n) \tag{24}$$

等式右边求和，得

$$x(nT) = BFx_0 \frac{y(1-B^n y^n)}{1-By}$$

又 $C(nT) = \dfrac{x(nT)}{V}$，将 B，y 代入该式，有

$$C(nT)=\frac{Fx_0}{V}\cdot\frac{1-\left(\frac{k_1}{k_1-k}\right)^n(\mathrm{e}^{-kT}-\mathrm{e}^{-k_1T})^n}{\frac{k_1-k}{k_1(\mathrm{e}^{-kT}-\mathrm{e}^{-k_1T})}-1} \tag{25}$$

当 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}C(nT)=\frac{Fx_0}{V}\cdot\frac{1-\left(\frac{k_1}{k_1-k}\right)^n(\mathrm{e}^{-kT}-\mathrm{e}^{-k_1T})^n}{\frac{k_1-k}{k_1(\mathrm{e}^{-kT}-\mathrm{e}^{-k_1T})}-1}=\frac{Fx_0[k_1(1-\mathrm{e}^{-kT})-(k-k_1\mathrm{e}^{-k_1T})]}{Vk_1(\mathrm{e}^{-kT}-\mathrm{e}^{-k_1T})} \tag{26}$$

体内酒精的分布可由图 5 看出周期性饮酒后，体内酒精浓度缓慢趋于极限值 y_c.

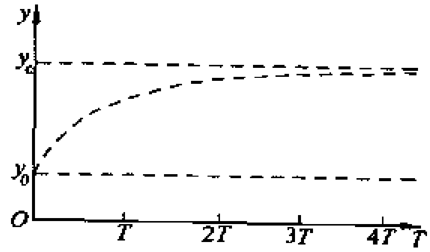


图 5

2.3 模型稳定性分析

2.3.1 对初值 C0 的渐进稳定性分析

由于人体内本身就有一定的酒精含量，设为 $C(0)=C_0$. 首先，根据微分方程解的存在唯一性定理可知，只要 $\frac{x_1(t)}{t}$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，则对于任意实数 $t_0\in[0,+\infty)$ 及 $C_0\in R$，方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{x_1(t)}{tV}-kC(t)\\C(0)=C_0\end{cases}$$

在 R 上存在唯一解 $C(t)$ 满足初始条件 $C(0)=C_0$，则只需验证微分方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{x_1(t)}{tV}-kC(t)\\C(0)=C_0\end{cases}$$

的解对于初值 C_0 是渐进稳定的.

由于上述微分方程的解为 $C(t)=C_0\mathrm{e}^{-kt}+\mathrm{e}^{-kt}\int_0^t\frac{1}{Vt}x_1(\tau)\mathrm{e}^{k\tau}\mathrm{d}\tau$，给初始值 $C(0)=C_0$ 一个微小的扰动，即 $C(0)=C_0\pm\delta$，则解为

$$C_1(t)=(C_0\pm\delta)\mathrm{e}^{-kt}+\mathrm{e}^{-kt}\int_0^t\frac{1}{Vt}x_1(\tau)\mathrm{e}^{k\tau}\mathrm{d}\tau$$

于是 $\forall t\in[0,+\infty)$，$|C(t)-C_1(t)|=\delta\mathrm{e}^{-kt}$. 于是 $b>0$，故 $|C(t)-C_1(t)|<\delta$，取 $\delta=\varepsilon$，有 $|C(t)-C_1(t)|<\varepsilon$. 因此，其解对于初值 C_0 是渐进稳定的.

由上可知方程的解对初值并不敏感，因此我们没有考虑人体内自身的酒精含量是完全可行的.

2.3.2　对非齐次项 $\frac{x_1(t)}{t}$ 的渐进稳定性分析

微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{x_1(t)}{tV}-kC(t)\\ C(0)=C_0\end{cases}$$

的解为

$$C(t)=C_0\,\mathrm{e}^{-kt}+\mathrm{e}^{-kt}\int_0^t\frac{1}{Vt}x_1(\tau)\mathrm{e}^{k\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

对于不同的非齐次项 $\frac{x_1(t)}{t}$ 和 $\frac{x_1^-(t)}{t}$，且 $\forall t\in[0,+\infty)$，有

$$\left|\frac{x_1(t)}{t}-\frac{x_1^-(t)}{t}\right|<\delta$$

则

$$\left|C(t)-C_1(t)\right|=\frac{1}{V}\mathrm{e}^{-kt}\left|\int_0^t\left(\frac{x_1(t)}{t}-\frac{x_1^-(t)}{t}\right)\mathrm{e}^{k\tau}\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\frac{1}{V}\mathrm{e}^{-kt}\int_0^t\left|\frac{x_1(\tau)}{\tau}-\frac{x_1^-(\tau)}{\tau}\right|\mathrm{e}^{kt}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\frac{1}{V}\mathrm{e}^{-kt}\,\delta\int_0^t\mathrm{e}^{k\tau}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{V}\mathrm{e}^{-kt}\times\delta\times\frac{1}{k}(\mathrm{e}^{kt}-1)=\frac{\delta}{Vk}(1-\mathrm{e}^{-kt})\leqslant\frac{\delta}{Vk}$$

当取 $\delta=Vk\varepsilon$，则对 $\forall t\in[0,+\infty)$，有 $\left|C(t)-C_1(t)\right|<\varepsilon$，由此可知，非齐次项 $\frac{x_1(t)}{t}$ 对解的影响不大，因此，该酒模型具有强健性.

2.4　模型的评价

快速、匀速、周期饮酒三种情况下，对体液（含血液）中的酒精含量的 $C(t)-t$ 模型，通过实验法，用其中一组数据确定了酒精含量以及酒精从胃肠进入血液的速度系数和酒精从血液渗透出体外的速度系数，并运用另一组数据进行检验. 通过模型，综合运用 Matlab 和 Lingo 两个软件，可方便、快速、较准确的求出各种饮酒方式下，饮酒后某时刻人体内的酒精含量. 模型稳定性高，应用性、可推广性强.

3　曲线在驾车领域的应用

每年全国道路交通事故死亡人数众多，其中因饮酒驾车造成的占有相当的比例. 针对这种严重的道路交通状况，国家质量监督检验检疫局 2004 年 5 月 31 日发布了新的《车辆驾驶人员血液、呼气酒精含量阈值与检验》国家标准. 新标准规定，车辆驾驶人员血液中的酒精

含量大于或等于 20 毫克／百毫升，小于 80 毫克／百毫升为饮酒驾车（原标准是小于 100 毫克／百毫升），血液中的酒精含量大于或等于 80 毫克／百毫升为醉酒驾车（原标准是大于或等于 100 毫克／百毫升）.

参考数据：人的体液占人的体重的 65%～70%，其中血液只占体重的 7%左右；而药物（包括酒精）在血液中的含量与在体液中的含量大体是一样的.

3.1 应用 1

某驾驶员在中午 12 点喝了一瓶啤酒，下午 6 点检查时符合新的驾车标准，紧接着他在吃晚饭时又喝了一瓶啤酒，为了保险起见他呆到凌晨 2 点才驾车回家，又一次遭遇检查时却被定为饮酒驾车，这让他即懊恼又困惑，为什么喝同样多酒，两次检查结果却不一样？

3.1.1 问题分析

这个问题是让许多驾驶员朋友疑惑的问题，但运用酒精浓度衰退曲线可方便的解答此问题．驾驶员在中午 12 点喝了一瓶酒，在某时刻喝酒可将喝酒过程看成是一个快速饮酒过程，故可用快速饮酒模型求解．

3.1.2 问题求解

在快速饮酒下，我们运用模型 1 的酒精浓度衰退曲线函数 $C(t)=\dfrac{k_1V_{酒}r\rho_{酒}F\rho}{M\lambda(k_1-k)}(e^{-kt}-e^{-k_1t})$ 来计算．虽然这个人喝等量的酒，并且第二次间隔的时间比第一次还长 2 h，第一次达标，但第二次却超标是因为第一次喝下去的酒，在 6 h 内可能还并没有完全分解，残留有一部分在血液中，并且这一部分在较长时间内不能完全分解．

一般情况下一瓶啤酒的体积为 650 ml，度数为 5 度，假设已知这个人体重为 70 kg，k_1，k，F 已知，运用计算机就可计算出饮酒后 6 h 这个驾驶员体内的酒精浓度为：19.5 mg/dl.（程序 TZB1.m）

设 A 为第一次喝酒在 6 h 后，残留在血液中的酒精量．由于考虑到在检查的时候不可能同时又在喝酒，故假设从第一次检查到第二次饮酒的时间间隔为 0.5 h，则实际上第一次饮酒到第二次饮酒的时间间隔就应为 6.5 h．现设当 $t=6.5$ h 时，残留在人体内的酒精量为 A，则有

$$A=\frac{M\lambda C(t)}{\rho}$$

则第二次喝酒时，酒精含量 $C(t)$ 与时间 t 的函数关系为

$$C(t)=\frac{k_1(V_{酒}r\rho_{酒}F+A)\rho}{M\lambda(k_1-k)}(e^{-kt}-e^{-k_1t})$$

代值用 Matlab 计算（程序见 TZB2.m），再过 7.5 h 酒精含量为 20.33 mg/dl．这就大于第一次的值．

3.2 应用 2

某人在很短时间内喝了 3 瓶啤酒（650 ml，5 度）或者半斤低度白酒后多长时间内驾车就不会违反新饮酒驾车标准？如果酒是在较长一段时间（比如 2 h）内喝的呢．并估计两种情况

下什么时候血液中的酒精含量最高？

3.2.1　酒是在短时间内喝的

在很短时间内喝 3 瓶啤酒时，相当于较短时间内使其胃肠的酒精浓度达最大值，运用模型 1 作出函数图像（见图 6）（程序见 TZB3.m）.

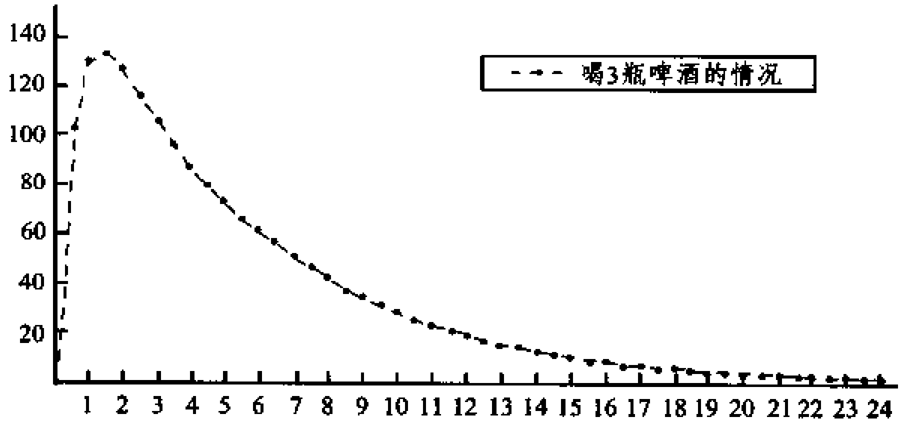


图 6

由计算可得 t：0.065～0.24 h 内饮酒驾车；t：0.34～4.5 h 内醉酒驾车；t：4.5～12 h 内饮酒驾车.

3.2.2　酒在较长时间内饮完

当酒是在较长一段时间（通常情况 2 h 左右）内饮的时，可将其视为匀速饮酒，即我们可用匀速饮酒模型来解决此问题.

将 $V=\dfrac{M\lambda}{\rho}$，$x_0=\rho_{酒}V_{酒}r$，代入（18）式得

$$\begin{cases} C(t)=\dfrac{\rho_{酒}V_{酒}r\,\mathrm{e}^{-kt}}{\tau M\lambda}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{kt}}{k}-\dfrac{\mathrm{e}^{kt-k_1t}}{k-k_1}+\dfrac{k_1}{k(k-k_1)}\right), & 0<t\leqslant\tau \\ C(t)=\dfrac{\rho_{酒}V_{酒}r(-1+\mathrm{e}^{-\tau k_1})(\mathrm{e}^{\tau k_1-kt}-\mathrm{e}^{-k_1(t-\tau)})}{M\lambda\tau(k-k_1)}, & t>\tau \end{cases}$$

将参数 $\tau=2$，$C(t)=20$ mg/dl，其余参数同上，代入上式计算可知，要安全驾车必须在 13.75 h 后（程序见 TZB4.m）.

3.2.3　血液中的酒精含量达最大值的时间

因考虑到拟合函数只存在一个驻点，即一个极值，则可对拟合函数求导，然后计算驻点值即可解得各种情况下酒精含量达最高时的时间．以饮 3 瓶啤酒为例，在快速饮酒情况下，解得 $T_{\max}=1.3145$ h，在匀速饮酒情况下，解得 $T_{\max}=1.105$ h．但值得注意的是，此时的 1.105 h 是在饮酒时间 2 h 后的时间段.

3.2.4　结论

通过分别求饮酒情况下体内的酒精浓度的最大值，可以发现快速饮酒情况下体内的酒精浓度的最大值要大于较长时间饮酒体内酒精浓度的最大值；并且从时间的角度来说，快速饮

酒体内的酒精浓度达最大值的时间要比慢速饮酒达最大值的时间短得多.

3.3 应用 3

如果某人有天天饮酒的习惯，这个人天天饮酒，是否还能安全驾车？如果还能开车，每天的安全饮酒量又是多少呢？

3.3.1 问题分析

如果某人天天饮酒，且只是某一相对固定时间饮酒，则可用周期饮酒模型来求解.

3.3.2 问题求解

由模型 3，知

$$C(nT)=\frac{Fx_0}{V}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{k_1}{k_1-k}\right)^n(\mathrm{e}^{-kT}-\mathrm{e}^{-k_1T})^n}{\dfrac{k_1-k}{k_1(\mathrm{e}^{-kT}-\mathrm{e}^{-k_1T})}-1}$$

在天天饮酒的情况下，可知 $n\to\infty$时，有

$$\lim_{n\to\infty}C(nT)=\frac{Fx_0k_1(\mathrm{e}^{-kT}-\mathrm{e}^{-k_1T})}{V[(k_1-k)-k_1(\mathrm{e}^{-kT}-\mathrm{e}^{-k_1T})]}$$

如果我们需要酒精含量接近 y_c 时，有

$$y_c=\frac{Fx_0k_1(\mathrm{e}^{-kT}-\mathrm{e}^{-k_1T})}{V[(k_1-k)-k_1(\mathrm{e}^{-kT}-\mathrm{e}^{-k_1T})]}$$

如果间隔时间 T 确定，那么饮入酒精量 x_0 为

$$x_0=\frac{y_cV[(k_1-k)-k_1(\mathrm{e}^{-kT}-\mathrm{e}^{-k_1T})]}{Fk_1(\mathrm{e}^{-kT}-\mathrm{e}^{-k_1T})}$$

假设这个人还能开车，也就是他体内的酒精浓度应小于 20 mg/dl，此时不妨取 $T=12$ h，$M=70$ kg，又 $V=\dfrac{M\lambda}{\rho}$，代值计算，得 $x_0=77\,774$ mg（程序见 TZB5.m）．只要每隔 12 h，饮酒量小于 77 774 mg 就不会出现违规情况，可以驾车；令 $y_c=80$ mg/dl，$x_0=311\,090$ mg（程序见 TZB6.m），即饮酒量大于 311 090 mg 时，在 12 h 时就会出现醉酒驾车情况，就不能驾车．当每次饮酒量为 $77\,774<y_0<311\,090$ mg 时，将出现饮酒驾车情况．

3.4 应用 4 驾驶员理论培训中应增设的内容——酒后安全驾车时刻表

（安全饮酒：是指为不得已而饮酒的驾驶员，提供一个饮酒限量，或为已饮一定量酒的驾驶员，提供安全驾车所需停驾时间量，使其不会造成饮酒驾车或醉酒驾车．酒后安全驾车（合法驾车）：指不得已而饮酒的驾驶员何时才能正常驾车，不至于因饮酒驾车肇事．）

古今中外，人类的历史几乎离不开酒，酒可以说是人际关系之润滑剂，酒既是药亦是毒，酒能助兴亦能扫兴．因此，让人们懂得适量而有节制的饮酒是很有必要的．为了最大限度的减少交通事故，我们都提倡不饮酒驾车．但在实际生活中，许多人为了应酬等，而不得不饮一点酒．那么在这样的情况下，如何让他们做到安全饮酒则是非常重要的．而且这也是主流倾向，这同样也能减少交通事故的发生．许多驾驶员之所以饮酒驾车，主要是因为他自己都不知道自己已经饮酒驾车了．因为大多数情况下，他们是在凭感觉做决定．但是如果他自己懂得一些人体内酒精浓度的估算，情况就会大为改观．因为，其一，处罚比较严厉；其二，大部分的人都还是认为安全是第一的．但事实上呢，在大部分驾驶员理论培训中，培训部门虽注重安全意识的培养，但几乎没有涉及此情况下，如何科学、数字化地去增强他们的安全意识．

现在我们通过对酒精浓度衰退曲线建立，制作酒后安全驾车量表，方便驾驶员朋友们自我控制．

考虑日常生活饮酒中快速饮酒的情况较多，因此，我们以快速饮酒方式的情况计算量化表．

由快速饮酒模型，有

$$C(t)=\frac{k_1\rho_{酒}rV_{酒}\rho_{血}}{M\lambda(K_1-K)}(\mathrm{e}^{-kt}-\mathrm{e}^{-k_1t})$$

日常生活中常见酒的种类及相应的酒精含量（见表 5）.

表 5　日常生活中常见酒的种类及相应的酒精含量

酒的种类	酒精含量（%）	酒的种类	酒精含量（%）	酒的种类	酒精含量（%）
茅台	52～54	五粮液	50	白兰地（英）	40
汾酒	60	郎酒	53～55	威士忌	40
泸州老窖	60 或 55	竹叶青酒	28，38，45	伏特加	30～40
洋河大曲	64，62，52	常见浅色啤酒	3.3～3.8	杜松子酒	38～40
剑南春	62，52	常见浓色啤酒	4-5，12	苦艾酒	12～17
古井贡酒	60～62	鸡尾酒	40～50	劳姆酒	42～52
董酒	60	曲酒	35～45	清酒	15～25
绍兴黄酒	18	高粱白酒	60	比特酒	18～45

据统计，我们发现一般情况下，市场上销售的各类酒中酒精浓度最低为 3 度，最高为 65 度．现在，对各浓度的酒进行分类，以 5 度为一个划分段，进行如下划分：3～5 度，5～10 度，10～15 度，15～20 度，25～30 度，30～35 度，35～40 度，40～45 度，45～50 度，50～55 度，55～60 度，60～65 度，通过计算可知非饮酒驾车和醉酒驾车的饮酒量边界值（注：酒的度数是酒中含乙醇的体积百分比）.

酒是乙醇的水溶液，各种饮用酒中都含有不同浓度的乙醇．人们通常所说的酒度即酒的度数，是指白酒中含乙醇的浓度，一般指在 20°C 时，100 ml 白酒中所含酒精的毫升数．如，50 度白酒是指 100 ml 白酒中含酒精为 50 ml．啤酒商标上标的度数却不是指酒精含量，而是指麦芽汁中含糖的浓度，通常以每公斤麦芽汁中含糖类物质的质量（g）的 1/10 为标准．例：每公斤麦芽汁中若含有 120 g 糖类物质，该啤酒就是 12 度，其酒精含量一般为 3%～3.5%．）

时间分别设为饮酒后 0.25 h，0.5 h，0.75 h，1 h，1.5 h，2 h，2.5 h，3 h，3.5 h，4 h，4.5 h，5 h，5.5 h，6 h，6.5 h，7.5 h，8 h，8.5 h，9 h，9.5 h，10 h，10.5 h，11 h，11.5 h，12 h．由模型 $C(t)=\frac{k_1\rho_{酒}rV_{酒}\rho_{血}}{M\lambda(K_1-K)}(e^{-kt}-e^{-k_1t})$，以一个体重为 70 kg 的人计算，将上式反解，得 $V_{酒}=\frac{M\lambda(k_1-k)C(t)}{K_1\rho_{酒}r\rho_{血}(e^{-kt}-e^{-k_1t})}$，即可求一个人的安全饮酒量．由上式计算所得酒后安全驾车时刻表如表 6 所示（表 6 附在这篇文章最后）（程序见 TZB7.m）．

3.5　应用 5　应用于机动车辆上的手磁感应酒精测试仪的研制设想

就目前已有的应用于机动车辆的典型酒精测试仪来看，基本都是呼吸式酒精测试仪，这种测试仪的优点是快速、简便．

如意大利母梅里诺大学发明了一种电子装置，可使饮酒驾驶员上车后无法开动汽车，以避免出现车祸．这种电子装置分为两部分：一部分装在驾驶室内，另一部分安装在发动机上，整个装置以密码控制，驾驶员无法关闭这一设备．当驾驶员上车后、驾驶室里能立刻嗅到“酒的气味’，遂立即通知发动机上的那部分装置，将发动机锁位，使汽车无法启动．待驾驶室酒气消失之后、发动机才能启动．

我国也已研究出新型饮酒报警控制器，这对贪恋杯中酒的驾驶员来说是很好的监督．在上海问世的 J-M 饮酒报警器无疑成为酒后驾车的“克星”．上海俊安实业公司配制成功这种小巧玲珑的饮酒报警控制器，采用新型酒敏专用传感器和数字式电控系统，与汽车开关电路相连接．当驾驶员启动汽车后，气体中的酒精含量如果超标，控制器就会在 10 s 内自动切断电路，同时发出“酒后别开车的声音”对驾驶员提出警告．

虽然这两种应用于机动车辆的酒精测试仪都具有许多优点，但都存在相同的缺点：主要技术指标均是以测量气体中酒精的含量入手，在实际中具有不可推广性．因为，其一，机动车辆的驾驶室一般都不是封闭的；其二，如果乘客中有饮酒者时，由于酒精具有挥发性，驾驶室里的空气中也会有一定的酒精含量，这样，在驾驶员没有饮酒的情况下，由于乘客有饮酒现象，也会导致车辆无法启动，影响驾驶员正常驾驶．因此，以测量气体中酒精含量为主要技术指标的酒精测试仪具有很大的局限性．

我们设想的手磁感应测试仪整个装置以密码控制，驾驶员无法关闭这一设备．它由三部分组成：手磁感应器，发动机控制器，酒后安全驾车时刻智能测试器．手磁感应器装在车辆的方向盘上，驾驶员双手一握到方向盘，就产生手磁感应，从而通过手磁感应测出驾驶员此时体内的酒精含量．酒精测试仪将测得的酒精浓度值传送给发动机控制器．它实现的功能是：将这个浓度值与饮酒驾车标准酒精浓度进行判断，如果这个值在酒后合法驾车范围内，则机动车辆正常启动；如果达到饮酒驾车标准，则系统立即发出警告“请别饮酒驾车”，并通过发动机油门控制减慢车速；如果该值达到醉酒驾车标准，则控制器立即在 10 s 内自动运行制动程序，停止车辆的启动．如果驾驶员已达饮酒驾车或醉酒驾车，驾驶员只需向“酒后合法驾车时刻计算器”输入自己的体重和饮酒量，通过智能计算，便可向驾驶员报告停驾车多长时间后才能安全驾车，从而有效减少交通事故的发生．

此种酒精测试仪的优点预计有两个：① 采用手磁感应测验驾驶员体内的酒精浓度，灵敏度高，可用性强．它不会因车中的乘客有饮酒或醉酒现象而影响车辆的正常启动．② “酒后

安全驾车智能测试器”为驾驶员提供方便，可以使他们做到心中有数.

3.6　应用 6　生产计量酒杯
——由“酒后安全驾车时刻表”想到的

在酒杯上加体积刻度，对饮酒量进行量化，事实上也是一条减少饮酒驾车及其他饮酒肇事现象的有效途径：第一，对饮酒量量化可以对饮酒人自身产生紧迫感．第二，方便饮酒人在饮酒时的自我约束．许多人在饮酒的时候都是凭感觉，比如“酒后安全驾车时刻表”上说饮 5～10 度的酒，2 h 后要开车的安全饮酒量为 159 ml，对于这个值，一般的人是没有具体观念的．如果有加刻度的酒杯，这个问题就可以很方便地解决.

3.7　应用 7　给天安保险公司的一封信

尊敬的贵公司领导：

我们是重庆文理学院数计系学生，同时也是“酒精浓度衰退曲线的应用研究”组的组员．贵公司在你们的开拓中，已经显示出了明显的竞争优势，在你们的细心营运中，贵公司有了长足的发展，显示出蓬勃的生命力．善于了解群众信息，采纳良好的群众意见，是贵公司越来越好的原因．希望以下我们的建议，能够对贵公司在有关赔偿问题制度方面的改革，有所帮助．同时，也真诚希望你们能够采纳我们的建议，因为这样会让更多的顾客感到你们的赔偿制度的公平性，从而为公司以后带来更多的经济效益，也使公司在赔偿制度上更能体现以人为本的思想.

近来贵公司积极改革，探索新的发展空间，首先推出了“酒后驾车保险”．我们查阅了贵公司关于机动车辆的保险条款（修订版），从中获悉了这样一条信息：投保人只有投保汽车损失险和第三者人身伤害责任险、第三者财产损失责任险、乘客和驾驶人伤害责任险才可投保非常事故损失特约险．在交通事故责任认定书载明的驾驶人饮酒驾车肇事，致使第三者人身伤亡或财产直接损失以及本车乘客遭受伤亡，依法应由被保险人负责赔偿的，保险人依据本条款的约定承担保险责任．经我们研究，发现贵公司这样的保险条款，不应这样过于笼统，应进行量化．赔偿措施应该与国家规定的合法驾车标准相一致，并且就现有的赔偿措施来说，将会增加饮酒驾车的比例，不利于交通法规管理．现建议贵公司在此问题的赔偿制度上做出相应的调整．建议调整的理由如下：

贵公司在对驾驶员饮酒问题上的赔偿制度应该和国家相应的有关标准一致，体现出你们的赔偿制度与国家标准的一致性．国家在《车辆驾驶人员血液、呼气酒精含量阀值与检验》的标准中规定，车辆驾驶人员血液中的酒精含量大于或等于 20 mg/dl 时为饮酒驾车；血液中的酒精含量大于 80 mg/dl 升时为醉酒驾车．也就是说当人体内的酒精含量小于 20 mg/dl 时不构成饮酒驾车，并且国家也据此制订了相关的处罚标准．而贵公司推出的“酒后驾车保险”没有与这个标准相关，这样就与国家在这一问题的处理方式上不一致.

首先，随人体内酒精浓度的不同，造成交通事故的几率也是不一样的．其次，在交通安全问题上国家标准有明显的划分和界定，按照人体内酒精浓度的不同分成饮酒驾车和醉酒驾车．所以，我们认为，为体现贵公司在赔偿制度中的合理性，并且与国家在这一问题处理方式上保持一致性，应对赔偿金按当时体内的酒精含量浓度等级予以不同等级的赔偿或处罚.

综上所述，本模型得到的酒精含量在人体内的衰退曲线，为机动车驾驶员提供了科学、

数字化判断是否应该驾车的依据，对有效主动预防和避免交通事故的发生有一定的积极意义，有利于解决驾驶员饮酒后体内酒精含量与停驾时间量分析的交通执法难题. 并对宣传和了解饮酒与驾驶安全的知识和理论，把握饮酒后安全驾驶时机均有一定的意义，对于减少酒后驾车造成的交通事故有着重要而深远的意义. 因此，在安全驾车领域有较广泛的应用. 而事实上，本模型的应用远远超过以上领域，通过类似研究，还可应用于医学、农学、养殖业等众多领域.

4 问卷调查表及分析等附件

附件一

关于安全饮酒知多少的问卷调查表

广大驾驶员朋友：

您好！按我国有关法律法规，车辆驾驶员在行车期间是不能喝酒的，但在实际生活中，许多人为了应酬等原因，不得不饮酒. 在这样的情况下，为了让广大驾驶员朋友做到安全饮酒，我们特地设计如下问卷，以供我们调查研究.

这里解释一个概念，所谓安全饮酒：是指为不得已而喝酒驾车的驾驶员，提供一个饮酒限量，或为已饮一定量酒的驾驶员，提供达标时所需等待的时间，使其不会造成饮酒驾车.

（请在符合自己的选项的○符号内打“√”，为确保调查内容的真实性，请认真填写，谢谢您的大力支持!）

一、受访者基本情况

1．性别：__________　　　　年龄：__________

2．教育程度：小学○　　初中○　　高中○　　高中以上○

3．您所持驾照类型：A 照○　　B 照○　　C 照○　　D 照○

4．您的驾龄：1 年以下○　　1～5 年○　　5～10 年○　　10 年以上○

二、调查基本内容

1．您是否有喝酒的习惯？

有○　　没有○　　谈不上习惯，只是有应酬的时候才喝○

2．您是否反对您的亲人喝酒？

反对○　　接受○　　无所谓○

3．驾驶员行车前是否可以饮酒？

可以○　　不可以○

4．您认为饮酒后是否一定不能驾车？

是○　　不是○

5．是否知道交通法规中关于饮酒驾车的规定？

知道○　　不知道○

6. 自己是否有饮酒驾车的经历？

有○　　没有○

7. 当您确定自己在喝醉情况下，是否还会坚持自己开车？

肯定会○　　肯定不会○　　有可能会○

8. 您是否有由于饮酒驾车而被处罚的经历？

有○　　没有○

9. 是否知道饮酒驾车、醉酒驾车中关于酒精含量的标准？

知道○　　知道一些○　　基本不知道○　　不知道○

10. 你是否遇到过饮酒后，由于某种原因而又不得不驾车的情况？

遇到过○　　没有遇到过○

11. 在考取驾驶证前的理论学习中是否涉及过关于安全饮酒的问题？

是○　　否○

12. 如果行车前不得已而喝酒，是否知道喝酒后多长时间行车才算安全行车？

知道○　　知道一些○　　基本不知道○　　不知道○

13. 就您所知，现行的理论学习中是否有关于饮酒量的多少与多长时间后才能驾车的详细说明？

有○　　没有○　　不知道有没有，反正自己不知道○

14. 就您而言，您是否愿意有一张这样的表，当自己喝酒后，可以从这张表中迅速查出自己体内大致的酒精含量，多长时间不能行车上路等？

愿意○　　不愿意○　　无所谓，有无都可以○

15. 您买了车保吗？

买过○　　没买过○

16. 如果你买过车保，你是否知道因驾驶员饮酒驾车而造成的损失，保险公司不予赔偿的条款.

知道○　　不知道○　　没有留心过这种细节问题○

17. 如果你想买车保，你是否更愿意买那种因喝酒驾车而造成事故时，保险公司按你当时体内的酒精浓度来分等级划分赔偿等级，而不是一概而论，凡是喝酒驾车造成的伤害或事故都不予以赔偿.

非常愿意○　　一般○　　无所谓○

18. 您以前是否接受过同类调查？

有○　　没有○

调查完毕，谢谢您的大力合作！祝广大驾驶员朋友们出入平安！

调查时间__________　　调查员__________

附件二

问卷调查分析

对于饮酒驾车的调查，最先始于2004年全国大学生数学建模竞赛，当时我们组在竞赛中

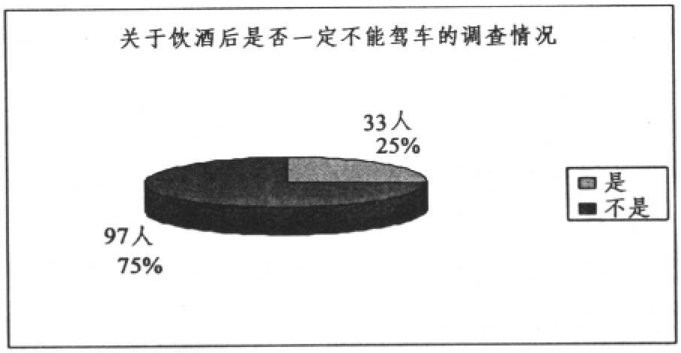
选择了 C 题，即饮酒驾车，我们觉得这个课题很有研究价值．因此，我们并未因为在建模竞赛中获得了一等奖而沾沾自喜，止步不前，而是继续深入研究．首先对广大驾驶员朋友在实际生活中，因应酬等原因，喝酒后驾车但又不违反国家相关法规，作了一系列的调查研究．

我们课题组于 2004 年 12 月对我校校区所在的永川市市区发放了问卷 150 份，回收的有效问卷 130 份，其中 30 至 45 岁之间的有 89 人，驾龄 1 年以上的有 102 人，80%以上的人具有初中以上文化水平，问卷的回收率为 86.7%．经数据整理和分析，我们得出了以下统计结果：

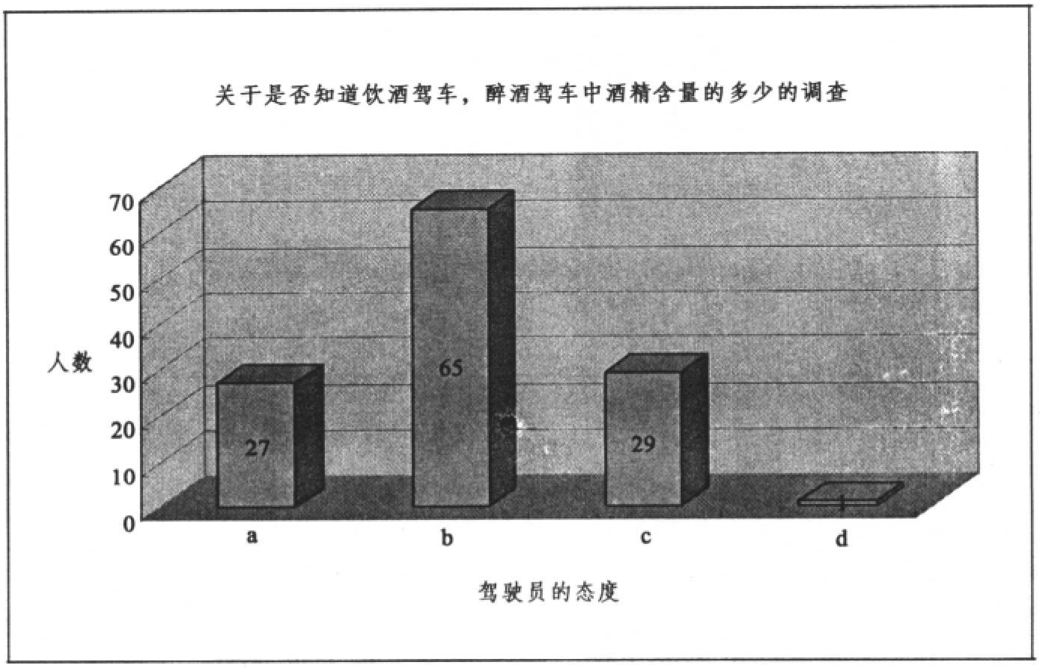
1．调查统计

（1）关于"驾驶员行车前是否可以饮酒？"的问题回答：认为驾驶员行车前可以适当饮酒的人数为 76 人，其中包括 3 名女性驾驶员在内．

（2）对于"您认为饮酒后是否一定不能驾车？"的回答认为不能开车的人数有 33 人，其中以女性和一些反对喝酒的人为主．而多数驾驶员则认为，少量饮酒后可以驾车．如下图所示．



大多数人都知道国家相关法规中有对饮酒驾车，醉酒驾车的规定，但具体的数据都不太清楚，如下图所示．

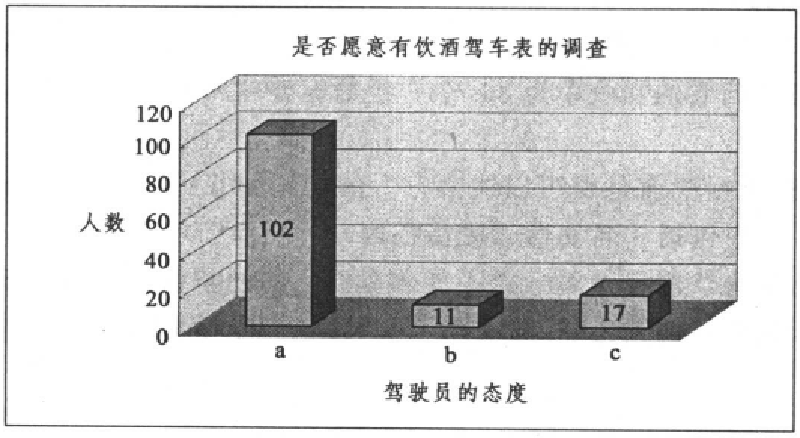


（a: 知道　　b: 知道一些　　c: 不太清楚　　d: 不知道）

在我们的调查过程中，只有 27 人能基本准确说出饮酒驾车，醉酒驾车的相关数据．多数

人都表示，在考取驾驶证前的理论学习中只是说了不准酒后驾车，但是在我们的实际生活中，这显然是不太现实的.

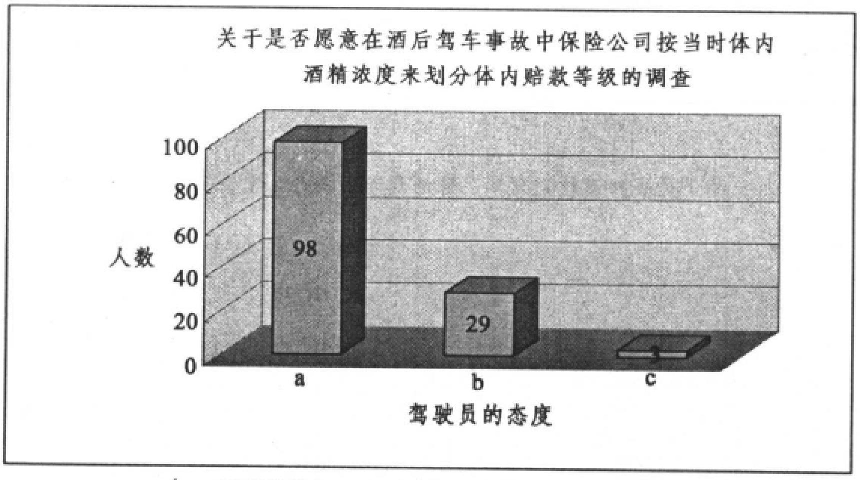
从我们的问卷中可以看出，大多数驾驶员（见下图）.



（a: 愿意　b: 不愿意　c: 无所谓）

希望有这样的一张表，当自己喝酒后，可以从这张表中迅速查出自己体内的酒精含量，多长时间不能行车上路．从这也可以看出，我们的调查研究方向是可取的，符合广大驾驶员朋友的心声，有很强的适用性．

在调查驾驶员是否购买车保方面，我们的调查是 130 人都选择了购买一定的保险．有 98 人都非常愿意因喝酒驾车而造成事故时，保险公司按你当时体内的酒精浓度来分等级划分赔偿等级，有 29 人也表示愿意，只有 3 人表示无所谓（见下图）.



（a: 非常愿意　b: 愿意　c: 无所谓）

2．调查分析

从我们的调查中我们可以得到这样的一些结论：多数驾驶员都有酒后驾车的经历，有一部分甚至是经常这样．究其原因，除小部分人是因为不得已而为之外，其余大部分人都是因为不清楚自己体内的酒精含量是否已经达到国家所规定的饮酒驾车，醉酒驾车的标准．喝点酒乃家常之事，但这个喝酒的度怎么去把握呢，很多人就不得而知了．因此，大部分人都非常迫切的希望能有一张这样的表：当自己喝酒后，可以从这张表中迅速查出自己体内大致的酒精含量，以及多长时间不能行车上路；或者知道自己某时间段后要驾车，那么怎么去控制

自己的饮酒量. 所以，我们应在这个方面做深入调查研究.

3. 结束语

通过这次调查，我们发现国家相关部门在驾驶员理论培训中关于酒后驾车的一些盲区. 从我们的调查中可以看出，78%的人愿意拥有一张安全饮酒数据表，98%的人愿意买那种因喝酒驾车而造成事故时，保险公司按当事人当时体内的酒精浓度分等级划分赔偿或不赔偿等级，这些将引起相关部门的关注. 经过分析，我们确立了《酒精浓度衰退曲线的应用研究》为研究课题，并做了一系列的深入研究，有针对性地提出了一些对策和建议.

附件三

酒后驾车危害多

——给想喝点酒驾车的驾驶员们的忠告

俗语说："美酒佳肴"，美酒自古以来对人的诱惑从未衰减. 多少人因贪杯而命丧黄泉. 据统计，酒后驾车发生事故的比率为没有饮酒情况下的 16 倍，几率高达 27%. 为了你的安全，请你注意以下信息.

1. 人的健康饮酒量

肝脏处理酒精的能力，按体重每公斤每小时计算可处理 0.125 ml. 体重为 70 kg 的人 1 h 能处理 8.75 ml，即相当于能处理清酒约 60 ml，啤酒约 200 ml，威士忌酒约 20 ml. 现在综合对酒的处理能力与免疫学调查，可以得出以下结论：

健康的安全性饮纯酒量每日为 50 ml 以内，有害量是每日 100 ml，危险量是每日 150 ml 以上.

2. 过量饮酒对人体的危害

饮酒驾车，是造成交通事故的重要原因之一. 酒精被胃、肠吸收后进入血液当中，当血液中酒精浓度达到一定程度时，中枢神经系统活动逐渐迟钝，致使大脑判断发生障碍，手脚迟钝不灵活，甚至丧失操作能力. 表现如下：

(1) 在血液中，酒精含量在 0.5～2 mg/ml 时，造成微醉. 表现为脸红、话多、反应迟钝、做事不顾后果，但尚未忘记自我.

(2) 酒精含量在 2～3 mg/ml 时，造成轻醉. 表现为言语不清、哭笑失常.

(3) 酒精含量在 3～4 mg/ml 时，造成深醉. 表现为腿脚发软，动作失调，陷入麻痹状态.

(4) 酒精含量在 4～5 mg/ml 时，造成泥醉. 表现为陷入昏睡状态，四肢无力，甚至造成大小便失禁，呼吸困难，最终可能导致死亡.

虽然饮酒驾车危害甚多，但并不是说一点都不能喝酒. 甚至还可以天天喝，但一定要注意控制自己的饮酒量和出车时间，结合上面的信息，注意以下几点，想喝一点酒的驾驶员们也能过一把酒瘾.

其一，如果你想每天既饮酒又驾车，而又不违规，请你一定记住，你每天涉入的酒精量不要超过 20 000 mg.

其二，一次性饮酒的酒精量越大，到达标时的时间会越长. 所以你等待时间的长短应根据你饮酒量的多少而定. 比如说一次饮一瓶啤酒，大约 6 h 后酒精含量就可达标；一次性喝 2 瓶啤酒，大概要等 9.5 h 后才能达标；而一次性喝 3 瓶啤酒，则大概要等 12 h 后才能达标.

其三，连续饮酒次数越多，每次间隔时间应越长．以第一题为例，第一次饮啤酒一瓶，过 6 h 达标，但第二次饮同样多的酒，同样再过 6 h，酒精含量增加到 27 mg/百毫升，要使第二次饮酒后，不超标，则至少应在 7.5 h 后再驾车．

附件四

血液中酒精浓度反应程度及处罚标准（参考）

（2004 年 06 月资料）

	仪表指示数（g%/ml）	酒精浓度	反应程度	处罚标准
国际标准	0.01～0.04	10～40 mg/100 ml		警告及罚款
	0.05～0.09	50～90 mg/100 ml		停止开车及罚款
	0.1～0.35	100～350mg/100 ml		吊销执照及罚款
	0.36 以上	360 mg/100 ml		拘留及吊销执照
酒醉程度及危险性	0.05	50 mg/100 ml	不呈醉酒状态	可有危险
	0.1	100 mg/100 ml	有明显影响	多有危险
	0.15	150 mg/100 ml	有很大影响	非常危险
	0.2	200 mg/100 ml	呈醉酒状态	肯定危险
	0.25	250 mg/100 ml	高度醉酒	肯定危险
中国最新颁布的标准				
	0.02	20 mg/100 ml		酒后驾驶
	0.08	80 mg/100 ml		醉酒驾驶

北京市赛福帝安全技术研究所

参考文献

[1] Jone AW. *Medicolegal determination-blood-or-breath-alcoholconcentration* [J]. For-ensic Sci Rew，2000，12（1）：23～47

[2] James M. *Drinking and driving* [J]. CAMJ，2003，168（3）：313

[3] 邓世雄，赵新才，朱秉忠等．重庆地区驾驶员血液中乙醇浓度与驾驶能力的关系[J]．中华创伤杂志，2004，3（20）：3

[4] 黄小为，姚远．人体中血药浓度变化的建模[J]．武汉理工大学学报 • 信息与管理工程版，2003（4）

[5] 赖江华．酒精在人体内的代谢动力学研究[J]．中国法医学杂志，1996（11）

[6] 卓先义．血中酒精消除速度与浓度推算关系的研究[J]．中国司法研究，2003（2）：23～26

[7] 张振宇，单晓梅，梅利华等．驾驶员酒后呼出气和血中乙醇浓度、时间一反应关系的研究[J]．劳动医学，1999（4）

[8] 王沫然．Matlab 7.0 与科学计算[M]．北京：电子工业出版社，2004

[9] 许虹．药物动力学的房室数学模型[J]．江汉大学学报（自然科学版），2002（4）

[10] 郭家松，酒精的吸收与代谢[J]．广州医学高专学报，2002（3）

[11] 中国天安保险股份有限公司驾驶员机动车辆保险条款（修订版）

[12] Shults RA，Sleet DA，Elder RU．*Association between state level drinking and driving countermeasures and self reported alcohol impaireddriving* [J]．Inj Preve，2002，8：106～110

[13] Wong E，Leong MK，Anantharaman V，et al. *Road traffic accident mortality in singapore*[J]．J Emerg Med，2002，22：139～146

致　谢

翻开这凝聚着我们几多心血的挑战杯作品，回想这数月以来，我们课题组全体成员在指导老师罗万成、何独明、余大鹏老师的悉心指导下，在许多专家教授及有关单位的帮助下，在我校各级领导特别是我系党总支，团总支的鼎力支持下，终于成稿，心中感激之情难以言表……

在作品的设计和构思阶段，我们受全国大学生数学建模竞赛题目 C 题的影响，觉得国内对这一内容的研究还不够深入，因此，这引起了我们对这个问题继续研究的兴趣．在指导老师的耐心指导下，我们更进一步地拓宽了思维，在如何将其应用这一问题上做了更深层次的思考．通过这种对问题的不断求索，我们认为我们青年一代应该有一种对科学的深入探究和对事业的执着的思想．

在作品的调研阶段，我们得到了重庆市第二人民医院和重庆市公安局刑警总队对我们的友好帮助．重庆市第二人民医院为我们免费采集血样，重庆市公安局刑警总队为我们采集的血样免费做血检．对我们研究课题的正常进行提供了准确的数据信息．同时也得到了重庆驾校培训中心以及永川各大保险公司的鼎力支持和大力配合．

正是他们，为我们课题的开展和深入提供了更广阔的空间．对此，我们深表感谢！

在作品的评审和完善阶段．感谢清华大学，北京理工大学，第三军医大学，重庆大学，西南师范大学，重庆市公安局交通管理局，重庆市公安局交警总队，尤其感谢第三军医大学大坪医院野战科研究所，中国人民解放军交通医学研究所等相关单位的专家给我们的作品提出的许多良好的修改意见和及其中肯的评价．是他们给予了我们巨大的肯定和鼓舞，给了我们不可多得的教诲．为此，我们向他们表示深深的谢意！

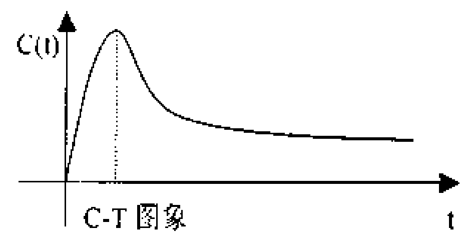
“百尺竿头，更进一步”，我们研究小组的全体成员一定会继续孜孜追求，努力奋斗！发扬既精诚协作，又各显所长的精神．

再一次向帮助我们完成这个项目的所有人员表示衷心的感谢！

表 6

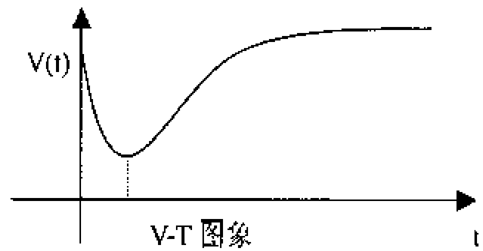
驾车时间	在已知所饮酒的度数的情况下，不构成饮酒驾车或醉酒驾车所能饮用的最大此类酒的体积（单位：ml）																							
	3～5 度		5～10 度		10～15 度		15～20 度		20～25 度		25～30 度		30～35 度		35～40 度		40～45 度		45～50 度		50～55 度		55～60 度	
	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒
0.25	613	2 452	307	1 227	204	817	153	613	123	490	102	409	88	350	77	307	68	272	61	245	56	223	51	204
0.5	393	1 572	196	786	131	524	98	393	79	314	65	262	56	225	49	196	44	175	39	157	36	143	33	131
0.75	330	1 321	165	661	110	440	83	330	66	264	55	220	47	189	41	165	37	147	33	132	30	120	28	110
1	308	1 230	153	615	103	410	77	308	62	246	51	205	44	176	38	154	34	137	31	123	28	112	26	103
1.5	303	1 210	151	605	101	403	76	325	61	242	50	217	43	173	39	151	34	134	30	121	28	110	25	101
2	319	1 275	159	637	106	425	80	319	64	255	53	212	46	182	40	159	35	142	32	127	30	116	27	106
2.5	344	1 377	172	688	115	459	86	344	69	275	57	229	49	197	43	172	38	153	34	138	31	125	29	115
3	375	1 501	188	750	125	500	94	375	75	300	63	250	54	214	47	188	42	167	38	150	34	136	31	125
3.5	411	1 643	205	821	137	548	103	410	82	329	68	274	59	235	51	205	46	182	41	164	37	149	34	137
4	450	1 800	225	900	150	600	113	450	90	360	75	300	64	257	56	225	50	200	45	180	41	164	38	150

注：从表上的数据来看，在 0.25～1.5 h 标准饮酒量逐渐减少，而大概 1.5 h 后，标准饮酒量又在逐渐增加，这似乎让人很难理解．因为一般情况下，可饮酒量与时间是成正比的．其实造成此现象的主要原因是由于酒精在人体内有一个吸收的过程，当刚饮入时，吸收还不完全，人体内血液中的酒精浓度就不高，虽然由计算得出此时段下的安全饮酒量较大，但一般情况下，此时不要远程驾车（驾车不超过 10 min），因为体内酒精浓度会在较短时间内达最大值．一般情况 0.25～1.5 h 之间达最大值，故如果饮酒后驾车时间刚好是这个时间的话，那他此时的安全饮酒量应该是最少的．



C-T 图象

(C(t)表示人体内酒精浓度随时间的变化曲线)



V-T 图象

（ V(t)表示人随时间变化安全饮酒下可饮酒的体积 ）

续表 6

驾车时间	在已知所饮酒的度数的情况下，不构成饮酒驾车或醉酒驾车所能饮用的最大此类酒的体积（单位：ml）																							
	3～5 度		5～10 度		10～15 度		15～20 度		20～25 度		25～30 度		30～35 度		35～40 度		40～45 度		45～50 度		50～55 度		55～60 度	
	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒	饮酒	醉酒
4.5	494	1 974	247	987	165	658	123	494	99	395	82	329	71	282	62	247	55	219	49	197	45	179	41	165
5	542	2 166	271	1 083	180	722	135	542	108	433	90	361	77	309	68	271	60	241	54	217	49	197	45	180
5.5	594	2 376	297	1 188	198	792	149	594	119	475	99	396	85	240	74	297	66	264	59	238	54	216	50	198
6	652	2 607	325	1 304	217	869	163	652	130	521	109	435	93	373	81	326	72	290	65	261	60	237	54	217
6.5	715	2 861	358	1 430	238	953	179	715	143	572	119	477	102	409	89	358	79	318	72	286	65	260	60	238
7	758	3 139	392	1 570	268	1 046	196	785	157	628	131	523	112	448	98	392	87	349	78	314	71	285	65	262
7.5	864	3 444	430	1 721	287	1 148	215	861	172	689	143	574	123	492	108	430	96	383	86	344	78	313	72	287
8	745	3 778	472	1 889	315	1 260	236	945	189	756	157	630	135	540	118	472	105	420	94	378	86	343	79	315
8.5	1 036	4 145	518	2 073	345	1 382	259	1 036	207	829	173	691	148	592	130	518	115	461	104	415	94	377	86	345
9	1 137	4 548	569	2 274	379	1 516	284	1 137	227	910	190	758	162	650	142	569	123	505	114	455	103	413	95	379
9.5	1 248	4 990	624	2 495	416	1 663	312	1 247	250	998	208	832	178	713	156	624	139	554	125	499	113	454	104	416
10	1 369	5 475	684	2 737	456	1 825	342	1 369	274	1 095	228	913	196	782	171	684	152	608	137	548	124	498	114	456
10.5	1 502	6 007	751	3 003	501	2 002	375	1 502	300	1 201	250	1 001	215	858	188	751	167	667	150	601	137	546	125	501
11	1 648	6 591	824	3 296	549	2 197	412	1 648	330	1 318	275	1 099	235	942	206	824	183	732	165	659	150	599	137	549
11.5	1 808	7 232	904	3 616	603	2 410	452	1 808	362	1 446	301	1 205	258	1 033	226	904	201	804	181	723	164	657	150	603
12	1 984	7 935	991	3 967	661	2 650	496	1 984	397	1 587	330	1 322	283	1 134	248	992	220	882	198	793	180	721	165	661

煤矿瓦斯和煤尘的监测与控制研究

谢小平　罗先锋

【摘要】如何划分煤矿瓦斯等级、判断煤矿瓦斯灾害不安全程度和安全目标下矿井风量控制，对煤矿安全生产具有重要意义．通过对中小型煤矿安全生产现状分析，给出了安全评价的主要三个方面．建立了三种不同的量化方案，运用Matlab和Lingo编程计算，分别给出了中小型煤矿的矿井瓦斯等级分类、矿井瓦斯灾害不安全程度和矿井所需最佳风量等问题的监测与控制的合理解决方案．提出了瓦斯管理建议和一套低成本、高效益的监测监控系统．同时研制了一套关于矿井瓦斯等级分类、矿井瓦斯灾害不安全程度和矿井所需最佳风量的自动实现实时监测控制系统．

【关键词】瓦斯等级　不安全程度　风量控制　应用案例　监测与控制系统　自动实时监控系统

1 引　言

煤矿安全生产是目前社会重点关注的热点问题，尤其是在能源紧张、煤炭的需求量供不应求的情况下，煤矿安全生产问题更引人注目．

据不完全统计，2005 年全国煤矿发生事故 405 起，死亡 2 157 人．瓦斯事故死亡人数占总死亡人数的 36.0%，在 58 起一次死亡 10 人以上的特大事故中，瓦斯事故 40 起，占 69%；2006 年全国煤矿发生事故 2 945 起，死亡 4 746 人．其中有 28%死于瓦斯爆炸和瓦斯突出．

我们注意到，大部分事故的罪魁祸首是瓦斯或煤尘爆炸．因此，矿井下的瓦斯和煤尘对煤矿的安全生产构成了重大威胁．做好煤矿井下瓦斯和煤尘的监测与控制是保证煤矿安全生产的关键所在．为了加强煤矿安全生产监督、管理，可以通过安全评价有效提高煤矿生产管理水平，促进煤矿实现本质安全化生产，预防和控制重大事故发生．

安全评价可以为改善煤矿安全管理现状、提高安全管理水平提供依据；为煤矿预防、控制事故发生提供安全对策措施；为煤矿生产投资、安全投入及提高经济效益提供建议．因此，安全评价对煤矿安全生产具有重要意义，同时也将为煤矿生产带来巨大的利益．

下面通过安全评价的主要三个方面对煤矿安全生产实现监测与控制．

2 矿井瓦斯等级分类

矿井瓦斯等级分类可以发现煤矿瓦斯存在的危险，为煤矿提供经济、合理、科学并具有可操作性的安全对策措施，对安全管理有重要作用．所以，矿井瓦斯等级分类是煤矿安全评价的一个重要方面．

2.1 基本概念

瓦斯矿井必须依据矿井瓦斯涌出量多少进行分类．其中重要的两个指标是矿井相对瓦斯涌出量和矿井绝对瓦斯涌出量．

定义 1 绝对瓦斯涌出量 Q_g 为单位时间里涌出的瓦斯体积，单位为 m^3/min 或 m^3/d，即

$$Q_g = \frac{Q \times C}{100}$$

其中，Q 为风量，C 为风流中的平均瓦斯浓度．

定义 2 相对瓦斯涌出量 q_g 为平均日产一吨煤同期所涌出的瓦斯量，单位是 m^3/t，即

$$q_g = \frac{Q_g}{A}$$

其中，Q_g 为绝对瓦斯涌出量（m^3/d），A 为日产量．

根据绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量的定义和矿井各监测点监测的风速，瓦斯浓度和煤尘浓度的数据，可以计算出矿井内所有采煤工作面的绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量，参照《煤矿安全规程》中矿井瓦斯等级分类标准，可以对矿井瓦斯等级进行分类．

2.2 多工作面多班次工作的矿井瓦斯等级分类

由于采煤工作面和掘进工作面有大量的瓦斯涌出，根据瓦斯的相对和绝对涌出量的定义，我们需考虑多个采煤工作面和掘进工作面相对瓦斯涌出量和绝对瓦斯涌出量．

假设煤矿是两个工作面三班倒的工作模式，可以据矿井监测的最新一个月数据分析，提出下列方法及步骤计算出工作面绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量．具体步骤如下：

第一步：分别计算 1 天中的早、中、晚班的绝对瓦斯涌出量，然后求平均计算出当天的平均绝对瓦斯涌出量．

第 i 个工作面第 j 天第 k 班的绝对瓦斯涌出量：

$$Q'_{ijk} = \frac{Q_{ijk} \times C_{ijk}}{100}, \quad (i = 1, 2 \,;\, j = 1, 2, \cdots, 30 \,;\, k = 1, 2, 3) \tag{1}$$

第 i 个工作面第 j 天的平均绝对瓦斯涌出量：

$$Q'_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} Q_{ijk} \tag{2}$$

第二步：求一个月中各天的平均绝对瓦斯涌出量的最大值．即第 i 工作面一个月中各天的平均绝对瓦斯涌出量的最大值为

$$\overline{Q}_i = \max_{1 \le j \le 30} \{Q'_{ij}\}, \quad i = 1, 2 \tag{3}$$

第三步：根据前面关于各工作面每日煤产量相同的假设，计算第 1 个工作面和第 2 个工作面的日平均煤产量为

$$\overline{A}_1 = \overline{A}_2 = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}\frac{1}{2} \times A_i \tag{4}$$

第四步：根据第二步和第三步计算得到的 $\overline{Q}_i$，$\overline{A}_i$（$i=1$，2），我们可以算第 i 个工作面的相对瓦斯涌出量为

$$q_i = \frac{1440 \times \overline{Q}_i}{2 \times \overline{A}_i}, \quad i = 1, 2 \tag{5}$$

最后，将煤矿瓦斯等级分类标准和上面对绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量的计算结果比较，我们可以给出判断煤矿瓦斯等级的方法．多工作面多班次工作的矿井瓦斯等级分类可以按照同样的方法进行分类．

3　矿井瓦斯灾害不安全程度预测

在第一章中，我们知道了矿井瓦斯等级分类方法以及矿井瓦斯等级分类是安全评价的一个方面．但是低瓦斯的矿井就一定安全吗？答案是不一定．另外，瓦斯灾害不安全程度到底有多大呢？所以，有必要考虑安全评价的另一个方面——矿井瓦斯灾害不安全程度预测．

3.1　不安全程度影响因素及评价

要判断煤矿瓦斯灾害的不安全程度（即发生爆炸事故的可能性），必须找到评价它的指标．当然，影响煤矿的不安全程度的因素有很多．这里，主要考虑影响矿井安全生产的两个因素：瓦斯浓度和煤尘浓度．

煤矿瓦斯灾害不安全程度评价关键在于判断在哪些情况下有发生爆炸的可能．根据《煤矿安全规程》第一百六十八条的规定，在工作面、掘进面及回风巷中，当瓦斯浓度大于等于 1.0% 时，甲烷传感器将发出报警．于是我们可以利用概率统计的方法，求出一个月中瓦斯浓度大于报警浓度的概率，即不安全程度的大小．并且根据瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度的关系，确定在一定瓦斯浓度下煤尘的爆炸下限浓度，由此来预测矿井瓦斯灾害不安全程度的大小．

3.2　瓦斯浓度和煤尘爆炸浓度的函数关系

附表 1 中的瓦斯浓度影响煤尘爆炸浓度给出的是离散数据，而没有具体给出瓦斯浓度和煤尘爆炸浓度下限范围的函数关系．据此，我们在探究瓦斯和煤尘爆炸时，先刻画瓦斯浓度和煤尘爆炸浓度下限范围的函数关系．我们提出以下具体分析步骤：

第一步：根据附表 1 画出空气中瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度范围（左端点，右端点）的散点图和关系，见图 1 和表 1．

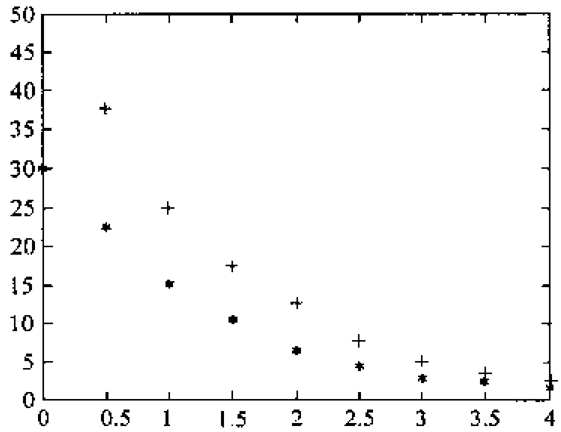


图 1　空气中瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度散点图

表 1　瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度关系

瓦斯浓度（%）	0	0.5	1.0	1.5	2.0
煤尘下限浓度（g/m^3）	30～50	22.5～37.5	15～25	10.5～17.5	6.5～12.5
瓦斯浓度（%）	2.5	3.0	3.5	4	
煤尘下限浓度（g/m^3）	4.5～7.5	3～5	2.5～3.5	1.5～2.5	

第二步：散点图趋势分析及函数拟合．从图 1 可以看出，该散点图呈内凹的趋势，我们可以根据煤尘爆炸下限浓度（左端点、右端点）随空气中瓦斯浓度的数据分别对其进行两次非线性拟合和对数拟合，并根据残差平方和大小选择最佳拟合函数．

剔除奇异点之后，二次非线性拟合中煤尘爆炸下限浓度的左端点值的残差平方和为 3.328 6，右端点值的残差平方和为 7.580 1；对数拟合中煤尘爆炸下限浓度的左端点值的残差平方和为 3.300 7，右端点的残差平方和为 2.914 8．因此，关于煤尘爆炸下限浓度左端点和右端点的对数拟合是最佳拟合，拟合函数分别为：

煤尘爆炸下限浓度左端点值关于瓦斯浓度的函数 y_1 为

$$y_1 = e^{-0.7547c+3.4394} \tag{6}$$

煤尘爆炸下限浓度右端点值关于瓦斯浓度的函数 y_2 为

$$y_2 = e^{-0.7721c+3.9817} \tag{7}$$

y_1，y_2 的拟合曲线如图 2 所示．

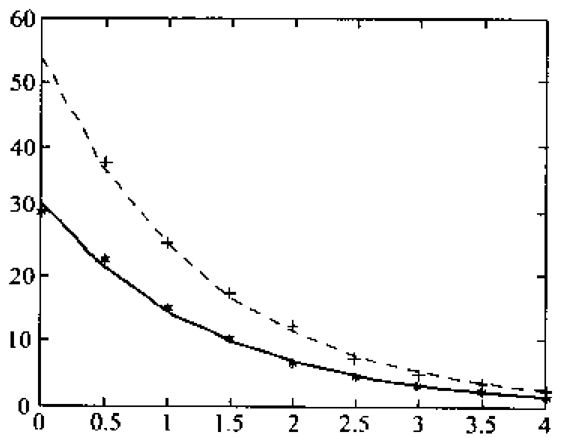


图 2　空气中瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度的拟合曲线

3.3　矿井不安全程度的模糊评价方法

从附表 1 和关于瓦斯浓度与煤尘爆炸下限浓度（左端点、右端点）的拟合函数可知，对于任意给定的瓦斯浓度，煤尘爆炸下限浓度皆有一定的取值范围．因此，利用模糊统计的方法建立一个关于某瓦斯浓度下煤尘是否爆炸的模糊隶属度函数．然后根据该函数确定各天各班次各工作点煤尘爆炸的程度，从而来刻画该矿井煤尘爆炸的可能性．具体步骤如下：

第一步：建立模糊隶属度函数．设空气中瓦斯浓度为 c 时，煤尘爆炸浓度为 y，且煤尘爆炸下限浓度范围为 $y_1 - y_2$，则相应的模糊隶属度函数为

$$f(c)=\begin{cases} 0, & c<y_1 \\ \dfrac{c-y_1}{y_2-y_1}, & y_1<c<y_2 \\ 1, & c>y_2 \end{cases} \tag{8}$$

第二步：设可能发生爆炸对象个数为 n，相应的瓦斯浓度和煤尘浓度分别记为 (c_1, y_1)，(c_2, y_2)，…，(c_n, y_n)，则煤矿不安全的可能性 p 为

$$p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \tag{9}$$

4　安全目标下矿井通风控制

为降低瓦斯浓度，可以对矿井通风，将瓦斯排出井外，从而降低瓦斯浓度．但为了避免煤尘飞扬，并不是通风越大越好，也不是风速越大越安全．所以安全目标下矿井通风控制也是安全评价的一个重要方面．

4.1　优化通风的因素确定

对于实际矿井中，为了要保证煤矿工人的正常工作，必须向井下输送新鲜的空气，保证井下空气中的含氧量（一般在 30%左右）充足．另一方面，由于矿井下采煤的机械化作业的环境，产生火花是不可避免的，因此引起瓦斯爆炸的引火温度和氧气浓度条件是客观满足的，于是预防煤矿瓦斯爆炸的方法只有监测和控制井下瓦斯的浓度．降低井下瓦斯浓度的唯一方法就是通过通风系统将瓦斯排出井外．从降低瓦斯浓度的角度，风速越大越好．但是井下风速过大，将会增加巷道空气中的煤尘浓度，一方面影响工人的正常工作和健康，另一方面主要是煤尘浓度过高遇火也会引发爆炸．

因此对矿井内的通风进行优化，以爆炸危险性最小和风量最小为目标，各巷道内风速上限为约束，可以建立一个优化数学方案．

4.2　通风优化方案的建立

根据煤矿开采工作中的实际情况以及《煤矿安全规程》对风流中有关瓦斯浓度、煤尘浓度

的要求，确定采煤工作面和巷道所需通风量的主要原则是：采煤工作面的瓦斯浓度不超过1%，其他有害气体都不超过《煤矿安全规程》规定（只考虑瓦斯和煤尘）；能够有效地排出瓦斯和矿尘，但又不能造成煤尘飞扬.

4.2.1 瓦斯浓度 C 与风速 V 的关系

各工作面和回风巷的瓦斯浓度与风速、断面面积以及瓦斯涌出量有不确定的因素，但在一定时间内，瓦斯绝对涌出量变化较小，因此可设单位时间里瓦斯涌出量相等，断面横截面积视为常数. 通风前后瓦斯浓度 C_1，C_2 与风速 V_1，V_2 的关系为

$$C_1 \times V_1 \times S = C_2 \times V_2 \times S \tag{10}$$

由此可得瓦斯浓度与风速成反比. 所以

$$C_2 = \frac{C_1 \times V_1 \times S}{V_2 \times S} = \frac{q_{采} \times k_{采}}{W_i} \tag{11}$$

式中，W_i 表示给采煤工作面实际通风风量，$q_{采}$ 表示采煤工作面回风巷风流中日平均瓦斯绝对涌出量，$k_{采}$ 表示采煤工作面瓦斯涌出不均衡系数.

4.2.2 通风量优化计算方案

为了保证安全生产和符合经济要求，确定该煤矿所需要的最佳通风量，除了采煤工作面所需风量外，还要考虑掘进工作面和主巷道所需的风量. 本问题可由一个线性优化方案来描述，具体地：

$$\min \quad W = \left(\sum_{i=1}^{n+1} W_i + M \right) \times K$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 0.25 \times 60 < W_i / S_2 < 6 \times 60, \quad i = 1,2,\cdots,n \\ 0.15 \times 60 < W_{n+1} / S_2 \\ \dfrac{\overline{W_i}}{W_i} < 1\%, \quad i = 1,2,\cdots,n+1 \\ 150 < M < 400 \\ M < W_{n+1} \times 0.85 \\ \dfrac{W}{S} < 8 \times 60 \\ 0.15 \times S_2 \times 60 < M < 4 \times S_2 \times 60 \end{cases} \tag{12}$$

式中，M 表示局部通风机单位时间的风量，W 表示矿井的总通风量，$W_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 表示第 i 个采掘工作面所需风量，W_{n+1} 表示矿井的主风巷风量，$\overline{W_i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 表示矿井中第 i 个采掘工作面的经验风量，$\overline{W_{n+1}}$ 表示主风巷的经验风量，S_1，S_2 分别表示主风巷和工作面风巷断面的横截面积，K 表示矿井通风系统（包括矿井内部漏风和配风不均匀等因素）备用系数，宜取 1.15～1.25.

说明：根据实际瓦斯绝对涌出量可以得到各个采煤工作面和掘井工作面所需风量，进入

采煤工作面所需风量不得低于采煤工作面的所需风量．巷道中至少要有 15%的富余风量，否则可能会出现负压回风逆流．如（2）式中约束条件 5 所示．

上述建立的优化模型中的目标函数 W 是变量 $W_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 和 M 的线性函数，约束条件也是变量 $W_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 和 M 的线性不等式，因此，各变量取得最小，目标函数 W 就可以取得最小．相应的计算方案如下：

第一步：对于采煤工作面、回风巷风流中日平均瓦斯绝对涌出量可以利用 EXCEL 电子表格算出正常生产条件下，连续观测一个月月平均日瓦斯绝对涌出量 $q_{采}$，给出采煤工作面需要的风量．

采煤工作面瓦斯涌出不均衡系数：

$$k_{采}=\frac{最大日瓦斯绝对涌出量}{月平均日瓦斯绝对涌出量} \tag{13}$$

第二步：根据《煤矿安全规程》规定，按采煤工作面回风巷中瓦斯浓度不超过 1%的要求，并按照瓦斯绝对涌出量计算采煤工作面所需要的风量为

$$W_i=100\times q_{采}\times k_{采},\quad i=1,2,\cdots,n+1 \tag{14}$$

式中，W_i 表示采煤工作面实际需要风量，100 表示采煤工作面回风流中瓦斯浓度不超过 1%所换算的常数．

第三步：局部通风机单位时间的风量 M 可以根据掘进工作面对风速的要求和局部通风机的额定风量得到．

$$M=\max\{150,0.15\times S_2\times 60\} \tag{15}$$

最后，通过监测值，对其状态进行分析，以爆炸危险性最小和风量最小为目标，对井下通风进行优化，这是一个多约束条件的优化数学方案．根据实际情况求解可以得到总通风量、各工作面通风量和局部通风机的额定风量．并用巷道风速上限和瓦斯浓度与煤尘浓度爆炸关系来进行安全检验．因此，通过对通风量的控制可以提高安全生产的管理水平，提高安全评价的准确性．

5　应用案例 1

以某公司下属煤矿（中型煤矿）为例，进行数据挖掘和分析，通过对实际矿井瓦斯等级分类、矿井瓦斯灾害的不安全程度以及安全目标下风量控制的量化，是矿井的安全评价方案在中型煤矿中的具体运用．

5.1　矿井瓦斯等级分类

首先，利用 Spss 软件对每日矿井绝对瓦斯涌出量、矿井相对瓦斯涌出量对时间进行正态分布检验（见附录三），结果表明每日矿井绝对瓦斯涌出量、矿井相对瓦斯涌出量对时间符合

正态分布，在稳定值附近波动.

其次，根据二中公式（1）～（5），可以利用 Matlab 软件分别计算出各采煤工作面的绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量，程序见附录一，具体结果见表 2.

表 2　采煤工作面的绝对（相对）瓦斯涌出量

瓦斯指标 \ 工作面	采煤工作面 1	采煤工作面 2
绝对瓦斯涌出量	3.941 0	4.979 8
相对瓦斯涌出量	9.45	11.78

由表 2 可知，采煤工作面 2 的相对瓦斯涌出量 $q_2 > 10$，故该矿井为高瓦斯矿井. 由于掘进工作面瓦斯浓度和风量远小于工作面 1 和工作面 2，所以，没有再考虑掘进工作面的相对和绝对瓦斯涌出量的必要.

5.2　矿井瓦斯灾害的不安全程度预测

从附表 2 中的监测数据可知，各观察点，在任意一天的任意工作时段的瓦斯浓度都远未达到瓦斯爆炸的程度. 因此，对于瓦斯而言，仅需根据《煤矿安全规程》第一百六十八条的规定判定各个考察点在任意天任意工作时段报警、断电、复电等事故的发生与否，并进一步统计出各个考察点在 30 天内发生报警、断电、复电的总次数，见表 3；同时，矿井爆炸的可能性仅需考虑相应的煤尘浓度. 利用式（9）计算可得 $p = \frac{25}{6\times 30\times 3} = 4.63\ \%$.

表 3　各个工作面的报警、断电、复电次数表

次数 \ 监测点	工作面 1	工作面 2	掘进工作面	回风巷 1	回风巷 2
报　警	0	5	0	0	20
断　电	0	0	0	0	20
复　电	0	0	0	0	12

5.3　安全目标下风量控制

由《煤矿安全规程》第一百零三条，矿井所需风量应符合本规定对风流中有关瓦斯浓度、煤尘浓度的要求.

首先，对于采煤工作面 1 回风巷风流中日平均瓦斯绝对涌出量可以利用 Excel 电子表格算出正常生产条件下，连续观测一个月月平均日瓦斯绝对涌出量 $q_{采} = 3.655\ 4\ \mathrm{m^3/min}$.

其次，采煤工作面瓦斯涌出不均衡系数可以利用 Excel 电子表格软件计算出：

$$k_{采} = \frac{最大日瓦斯绝对涌出量}{月平均日瓦斯绝对涌出量} = \frac{3.997\ 36}{3.794\ 5} = 1.053\ 5 \tag{16}$$

所以采煤工作面 1 所需风量：

$$W_1 = 100 \times 3.6554 \times 1.0535 = 385.10 \tag{17}$$

再次，对于采煤工作面 2，同理可以计算采煤工作面 2 所需风量：

$$W_2 = 100 \times 4.6948 \times 1.1312 = 531.08 \tag{18}$$

由瓦斯绝对涌出量可以计算采煤工作面所需风量，结果为采煤工作面 1 和采煤工作面 2 所需风量分别为 385.10 m^3/min 和 531.08 m^3/min. 同时建立的是一个多约束条件的最优化问题方案，利用 Lingo 编程得到最佳通风量为 $W = 1\,491.18$ m^3/min. 局部通风机额定风量为 150 m^3/min，程序和结果见附录七.

6　应用案例 2

以某公司（小型煤矿）为例，进行数据挖掘和分析，通过对实际矿井瓦斯等级分类、矿井瓦斯灾害的不安全程度以及安全目标下风量控制的量化，是矿井的安全评价方案在小型煤矿中的具体运用.

6.1　矿井瓦斯等级分类

首先，利用 Spss 软件对每日矿井绝对瓦斯涌出量、矿井相对瓦斯涌出量对时间进行正态分布检验，结果表明每日矿井绝对瓦斯涌出量、矿井相对瓦斯涌出量对时间符合正态分布，在稳定值附近波动.

其次，根据二中公式（1）～（5），可以利用 Matlab 软件分别计算各采煤工作面的绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量，具体结果见表 4.

表 4　采煤工作面的绝对（相对）瓦斯涌出量

瓦斯涌出量指标 \ 工作面	采煤工作面 1	采煤工作面 2
绝对瓦斯涌出量	1.92	2.53
相对瓦斯涌出量	4.73	5.78

由表 4 可知，采煤工作面绝对瓦斯涌出量和相对瓦斯涌出量都远小于高瓦斯矿井标准，故该矿井为低瓦斯矿井.

6.2　矿井瓦斯灾害的不安全程度预测

从附表中的监测数据可知，各观察点，在任意一天的任意工作时段的瓦斯浓度和煤尘都远未达到瓦斯报警、断电、复电等时的浓度，因此，在通风系统良好下，矿井爆炸的可能性为零.

6.3　安全目标下风量控制

由于目前矿井通风系统畅通且良好，所以自然通风都能基本满足矿井中每个工作面和巷

道需要的风量．所以，可以不必进行通风．但是，瓦斯的涌出量的不确定、不可控特点，也有必要通风，防止瓦斯的涌出量过多聚集发生事故．同时，也随时需要监测和保证通风系统畅通．

7 矿井瓦斯管理的建议

7.1 建立以“红黄蓝”三色考核为主的开放式员工激励机制

建立以“红黄蓝”三色考核为主的开放式员工激励机制，可以变单纯的员工考核为兼容开放的员工激励，建立起以“红黄蓝”三色考核为主，“三工并存、动态转换”互通兼容的开放式员工激励机制．其模式是：绘制一种形状为360度圆的综合考核图，按月度划分成30或31天，并用红黄蓝三种颜色对应员工当日综合表现进行涂色，分别表示“优秀”、“良好”、“待进”员工，实行差别薪酬制度．其优点：一是三种颜色的360度圆的综合考核图符合人的认知规律，直观醒目，较为人性化．二是流程科学，与精细化管理互通兼容性强．三是实现了从员工考核向员工激励的跨越，提高了管理层次，更符合人性化的要求．

7.2 以6S为模板，全面实行定置管理，实现人、机、物的最佳组合

以6S为模板，全面实行定置管理，实现人、机、物的最佳组合，这样，可以把规范员工行为和工作流程结合在一起，对人、机、物实行定置管理．做到从办公场所到各类库房寻找物品的时间为零；井下所有的机械设备、抽排管路、排班均按照设计要求精确定位；所有的工种岗位都有标准的工作流程并保证得到精准实施．

7.3 建立五级瓦斯监控机制

建立五级瓦斯监控机制，制定瓦斯事故处理预案，明确瓦斯事故处理的基本方针，抢险救灾的程序，各单位、岗位的职责范围以及详细的应对措施；建立内部隐患排查市场机制．对各个工作面按照潜在的危险等级，用红黄蓝三种颜色进行图解，重点控制，重点跟班．

8 煤矿安全生产监测监控系统方案

针对当前中小型全监测监控手段落后，缺乏足够资金和监督手段的情况，我们基于多套成功案例，结合组态软件的优势，设想总结出了一套低成本、高效益的煤矿安全监测监控解决方案，能够解决当前中小型煤矿安全生产中存在的问题．

8.1 监测监控系统背景

能源工业是我们国家经济发展的命脉所在．近年来，随着石油资源的紧张、石油价格的

飙升，煤炭行业的重要性和不可替代性也日益凸现．但中国煤炭行业的安全生产形势却不容乐观，尤其是重、特大伤亡事故屡见报端．据不完全统计，2005 年全国煤矿发生事故 405 起，死亡 2 157 人．瓦斯事故死亡人数占全国煤矿事故总死亡人数的 36.0%．在 58 起一次死亡 10 人以上的特大事故中，瓦斯事故 40 起，占 69%．一次死亡百人以上的事故 5 起．这些事故所造成的经济损失是重大的，给社会和伤亡人员的家庭所造成的影响与损失是无法估量的．在这些事故中，瓦斯爆炸又占绝大多数．这其中固然有很多因素，但各煤矿生产企业安全监测监控设备不完备、管理手段落后也是造成事故增多的重要原因之一．

随着国家对煤矿安全生产工作的日益重视，以及矿务局自身现代化管理的需求，煤矿安全监测监控系统越来越体现出其重要性．从技术和管理的角度出发，煤矿系统联网安全监测监控已是必然趋势，所以有必要对煤矿的安全生产监测监控系统进行分析．

8.2　监测监控系统要求

安全生产监测监控系统是在生产、安全及管理方面的一个实时监测监控系统，对于煤矿的生产运行状况、安全水平、灾害预测预报具有重要的作用．为了加强矿下的安全生产管理，利用现有网络资源掌握各个工作面的安全和生产情况，要求建立一套安全生产监测监控信息系统，将各个工作面进行实时监测监控数据集成在公司调度室，形成公司的安全生产监控网络，可以随时掌握矿井的生产状况和安全状况，并可以进行综合性动态分析，为领导决策提供依据．

煤矿安全生产监测监控系统是个实时调度、指挥系统．通过本系统可以使管理层快速、及时、准确地获取生产相关数据，提高决策科学性，从而避免或减少因决策失误而造成的安全生产事故和经济损失．

8.3　监测监控系统建设方案

监测监控系统实施共分为三部分：开发已有控制系统数据采集接口、组建实时数据库和用户组态三个部分（见系统设计图 3）．

开发已有控制系统数据采集接口是整个系统建设的技术关键和技术难点．有些煤矿早期投用的控制、监测系统，由于当时技术水平限制，根本没有提供外接数据接口，这些系统连接起来比较困难，一般需要找原始厂家解决问题．20 世纪 90 年代新上的控制系统一般都具有各种各样外接数据接口，利用工控组态软件提供的丰富数据外部接口协议、手段和标准，就可以完成开发已有控制系统数据采集接口的工作．

与已有控制系统建立通讯以后，按照整个煤矿安全生产监测监控系统建设的要求，组建实时数据库和用户工程组态，完成整个监测监控系统的要求，达到各项功能建立．

8.4　监测监控系统主要产品配置

监测监控系统主要产品配置：

（1）工控计算机：祥锐Ⅱ-P24D22（P4 级别），Ⅱ-P10S12（P3 级别）．

（2）一体化工作站和平板电脑：EWS-844E、PPC-1701．

（3）数据采集控制模块和板卡：ARK-2400 系列模块和板卡．

（4）防火墙：IPC-8101 服务器.

（5）数据服务器.

（6）组态软件.

（7）打印设备.

8.5 监测监控系统功能

监测监控系统功能：

（1）实时显示：通过软件实时显示各矿监测监控系统动态图形.

（2）实时故障记录、报警功能：保证领导实时掌握故障、报警信息.

（3）煤矿安全监测监控系统查询统计分析、历史监测信息曲线显示.

（4）数据安全采集：通过数据采集接口安全地从煤矿现有监测监控系统读取数据，并且保证数据传输的单向性.

（5）采集数据组态化：通过工控组态软件的组态工具可以改变要采集的数据，从而使数据采集变得更加灵活.

（6）提供关系数据库接口：通过工控组态软件的关系数据库接口模块可以将数据写入到关系数据库表中，为管理系统使用相关数据提供方便.

（7）保存历史数据：工控组态软件可以保存及显示历史数据和记录.

（8）数据处理及转发：工控组态软件能够对采集的数据进行处理，并将数据转发给数据请求者.

（9）IE 浏览：通过在网页上建立超链接，使查询不同地点数据时更加灵活方便.

8.6 监测监控系统特点

监测监控系统特点：

（1）开放性：采用计算机平台、系统平台开发，工控组态软件数据库提供了开放数据访问接口，可以实现数据库的二次开发.

（2）安全性：所有的设计方案都充分考虑了系统的安全性，使采集系统对监测监控系统的影响达到最小．设采用计算机使局域网与控制网相互隔离，从而避免局域网内人为因素或计算机病毒对监测监控系统的影响.

（3）响应速度快：客户端访问实时数据库的速度低于 1 s.

（4）运行稳定：实时数据平台经过严格的测试和长期的运行考查具有良好的稳定性.

（5）扩展性强：提供开放 I/O 接口规范，增强系统扩展性.

8.7 监测监控系统社会价值

利用工控计算机与工控组态软件相互结合，可以实现煤矿安全生产实时调度监测监控，不仅解决了煤炭行业整体技术水平低、管理落后的局面，提高了行业的调度信息化管理水平，更重要的是可以实时监测监控各个矿井的安全状况，随时调度指挥生产，避免和减少安全事故的发生．因此煤矿安全生产监测监控系统的建设，对煤炭企业的安全生产、文明生产、科学生产具有重要的意义．煤矿安全生产监测监控系统设计图如图 3 所示.

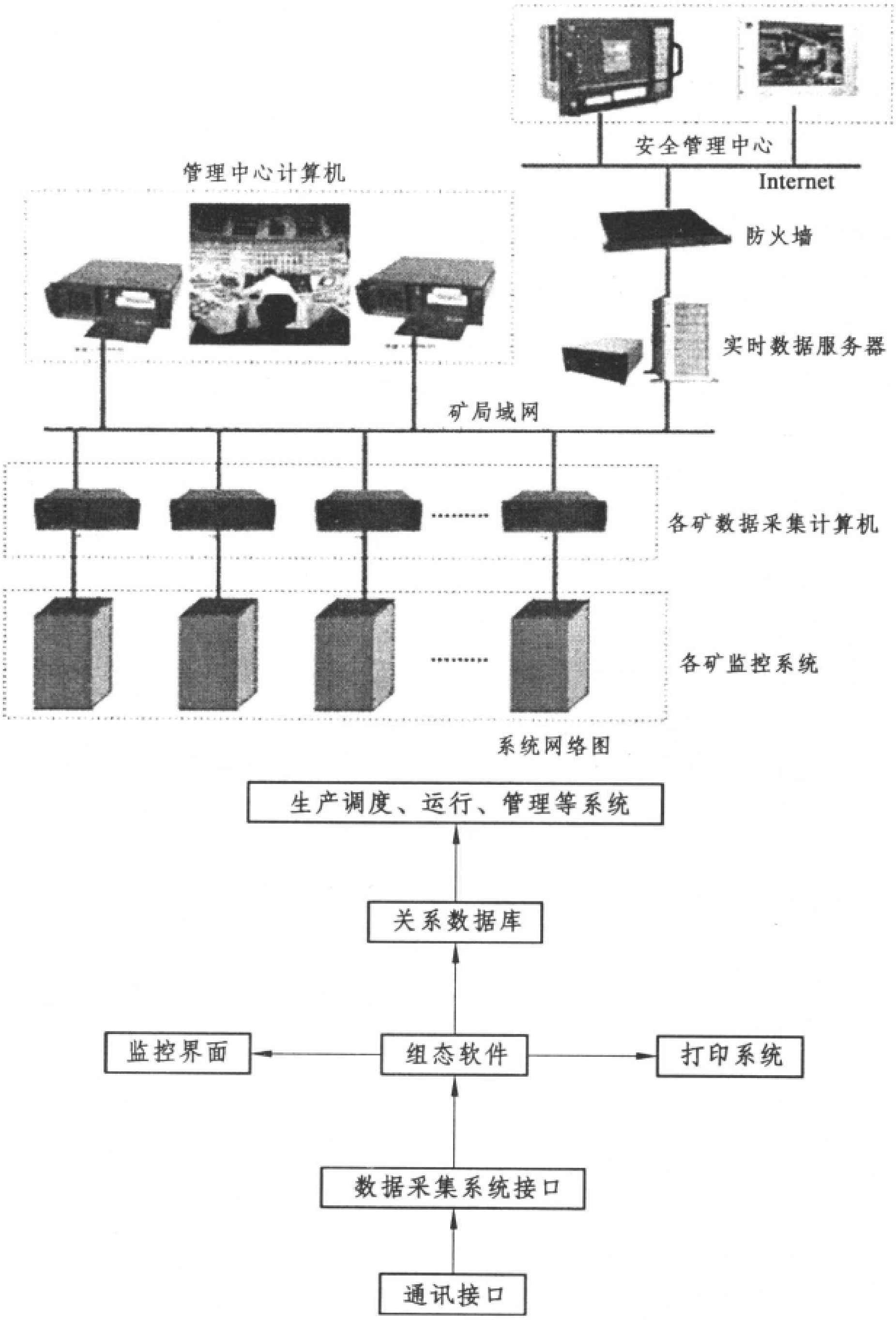


图 3　煤矿安全生产监测监控系统设计图

9　自动化实时监控系统

9.1　系统简介

自动化实时监控系统是针对当前中小型企业监测监控手段落后、缺乏足够的资金和监督手段而制作出的一套低成本、高效益的自动评价和控制煤矿安全生产的系统，是能自动实现